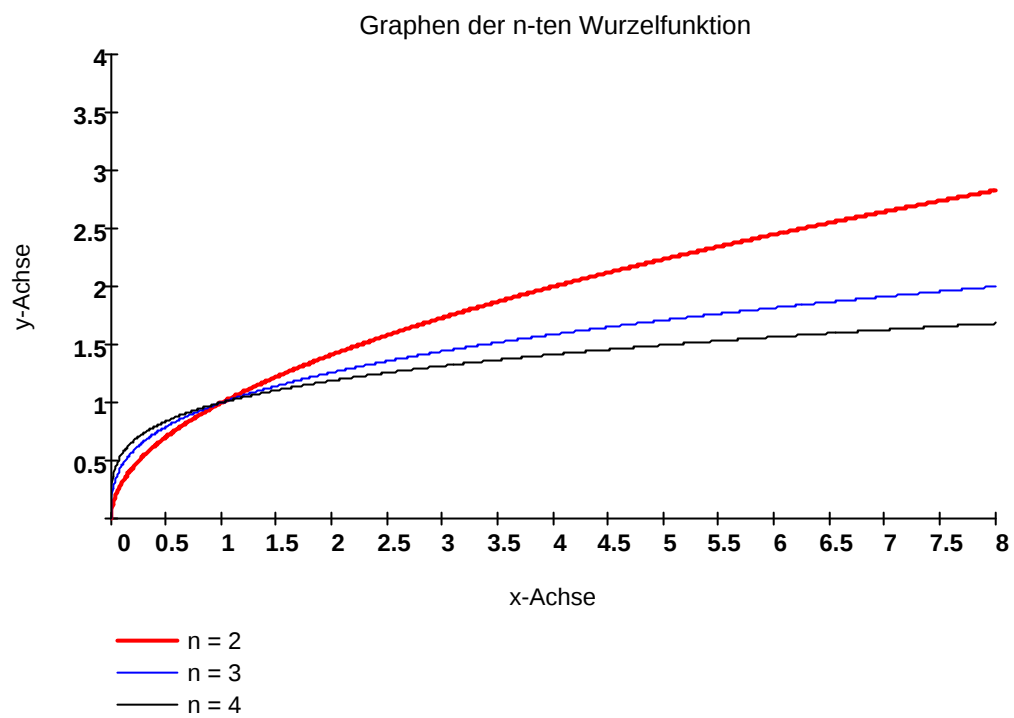


WURZELFUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Inhalt	Seite
1	Die Wurzel und Wurzelgesetze	1
2	Die einfache Wurzelfunktion	3
3	Die allgemeine Wurzelfunktion	4
4	Anwendung von Wurzelfunktionen	6

Das Rechnen mit Wurzeln und Wurzelfunktionen

1 Die Wurzel und Wurzelgesetze

Definition

Die ***n*-te Wurzel aus a** ist die positive Zahl $\sqrt[n]{a}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a \geq 0, n \in \mathbb{Z} \wedge n > 0$.

Bezeichnungen

$\sqrt{}$: Wurzelzeichen; a: Radikand; n: Wurzelexponent;

Zusammenhang mit Potenzen

Das Wurzelziehen (Radizieren) ist die Umkehrung des Potenzierens, das heißt:
Das Radizieren mit dem Wurzelexponenten n und das Potenzieren mit dem Exponenten n
heben sich gegenseitig auf, es gilt gemäß obenstehender Definition der Wurzel für

$$a > 0, n \in \mathbb{N} \wedge n > 1: \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_{n \text{ Faktoren}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Nach den Rechenregeln für Potenzen gilt: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$

Das Radizieren mit dem Wurzelexponenten n wirkt also wie das Potenzieren mit dem Exponenten $\frac{1}{n}$. Es gilt: $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

Satz

Für die Lösung der Gleichung $x^n = a$ wird oft die Schreibweise $x = \sqrt[n]{a}$ verwendet.

Die Anzahl der Lösungen richtet sich jedoch danach, ob der Wurzelexponent gerade oder ungerade ist.

Für Wurzeln mit **geradzahligem** Wurzelexponenten aus einer **positiven** Zahl wird festgelegt:

$$\bullet \quad n \geq 1 \wedge a \geq 0: x^{2n} = a \Rightarrow |x| = \sqrt[2n]{a};$$

Für Wurzeln mit **ungeradzahligem** Wurzelexponenten aus einer **negativen** Zahl wird festgelegt:

$$\bullet \quad n \geq 1 \wedge a \geq 0: x^{2n+1} = -a \Rightarrow x = -\sqrt[2n+1]{a};$$

Beispiel 1

Die Gleichung $x^2 = 4$ hat **zwei** reelle Lösungen: $x_1 = -2$ und $x_2 = +2$.

aber: $\sqrt{4} = 2$ (nach der Def. oben).

Beispiel 2

Die Gleichung $x^3 = -8$ hat **eine** reelle Lösung: $x_1 = -\sqrt[3]{8} = -2$.

$\sqrt[3]{-8}$ ist nicht definiert, denn:

$$\begin{aligned} -2 &= \sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}} \\ (-8)^{\frac{1}{3}} &= (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2 \end{aligned} \Rightarrow -2 = 2 \text{ ist ein Widerspruch}$$

In Anlehnung an die Potenzgesetze gelten für $n > 1 \wedge a > 0 \wedge b > 0$ folgende

Wurzelgesetze:

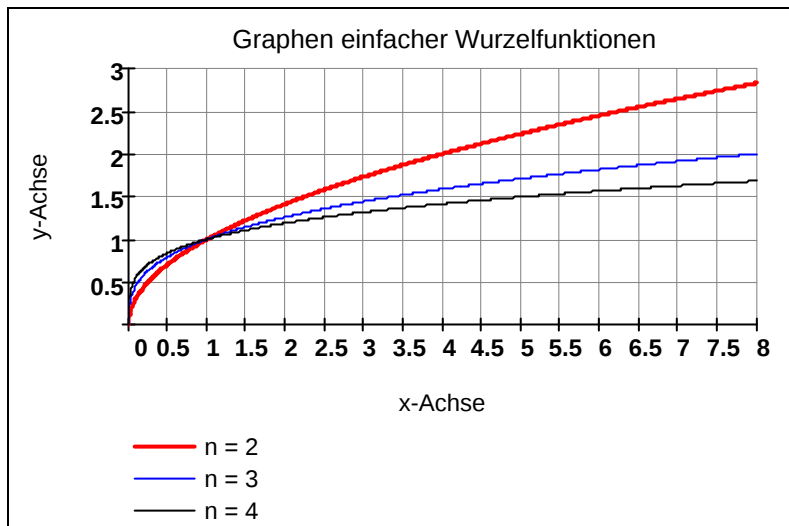
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = a^{-\frac{m}{n}}$

2 Die einfache Wurzelfunktion

Definition

Die Funktion $f: x \mapsto \sqrt[n]{x}$ mit $x \in \text{ID}$ heißt **Wurzelfunktion**.

Graphische Darstellung



Eigenschaften

Definitionsmenge: $\text{ID} = \mathbb{R}_0^+$

Nullstelle: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt[n]{x} = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

Gemeinsamer Punkt: $f(1) = \sqrt[n]{1} = 1 \Rightarrow P(1/1)$

Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left[\sqrt[n]{x} \right] = \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{1}{n}} \right] = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}} \text{ mit } x > 0.$$

Monotonieeigenschaft: $f'(x) > 0$ für alle $x > 0$, also ist G_f streng monoton steigend.

Der Graph ist nicht nach oben beschränkt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{x} \right] \rightarrow +\infty$.

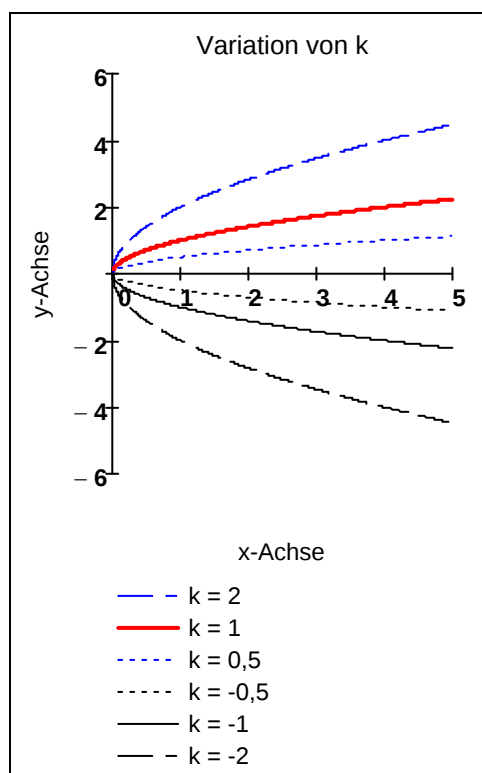
3 Die allgemeine Wurzelfunktion

Beispiel

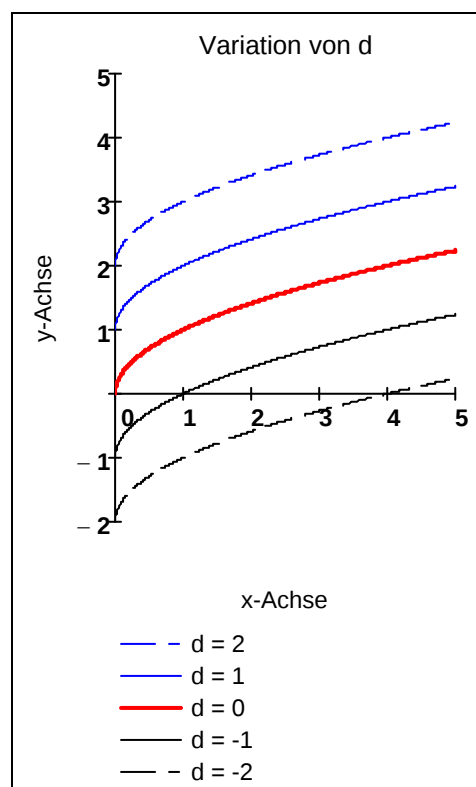
Gegeben sind die Funktionen f mit dem Funktionsterm $f(x) = k \cdot \sqrt{ax+b} + d$ mit $x \in \text{ID}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$.

Der Einfluss der Parameter soll im Folgenden veranschaulicht werden.

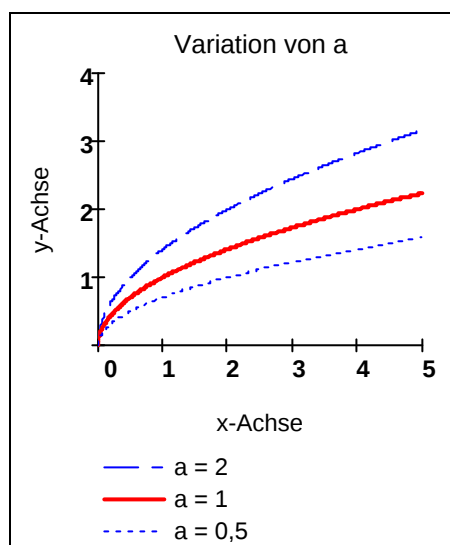
$$f_k(x) = k \cdot \sqrt{x}$$



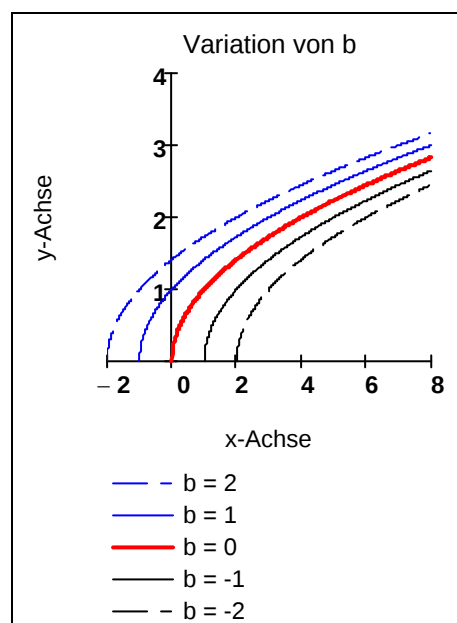
$$f_d(x) = \sqrt{x} + d$$



$$f_a(x) = \sqrt{ax}$$



$$f_b(x) = \sqrt{x+b}$$



Beispiele

Gegeben ist die Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \sqrt{ax+b}$ mit $x \in \text{ID}$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie Definitions- und Wertemenge sowie die Nullstelle.

Lösung

Definitionsmenge:

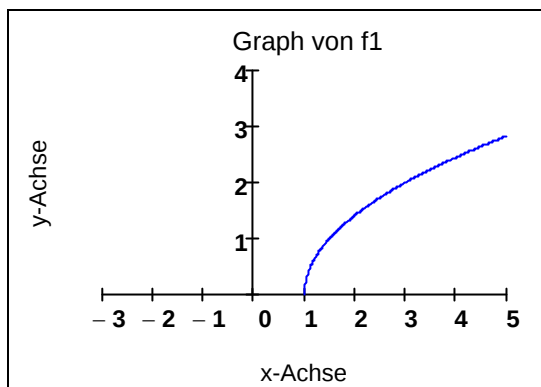
$$a > 0: ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a} \Rightarrow \text{ID} = \left[-\frac{b}{a}; \infty\right[$$

$$a < 0: ax + b \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a} \Rightarrow \text{ID} = \left]-\infty; -\frac{b}{a}\right]$$

Wertemenge: $W = [0; \infty[$

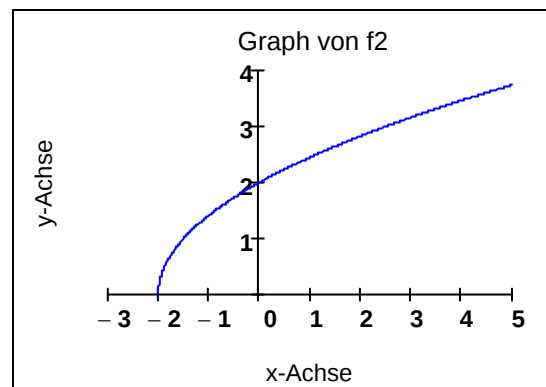
$$\text{Nullstelle: } ax + b = 0 \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{a}$$

$$f_1(x) = \sqrt{2x-2}; D_1 = [1; \infty[;$$



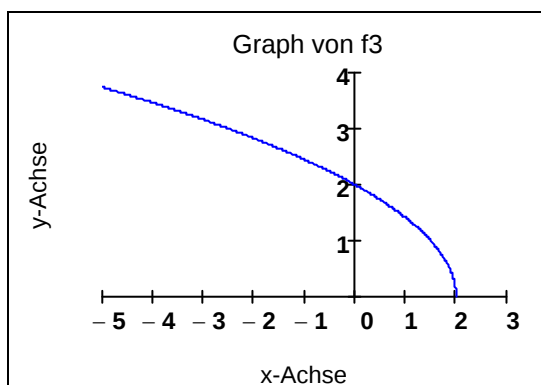
$$\text{Nullstelle: } 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = 1$$

$$f_2(x) = \sqrt{2x+4}; D_2 = [-2; \infty[$$



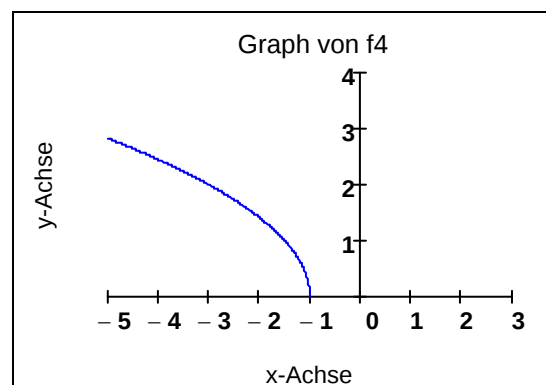
$$\text{Nullstelle: } 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = -2$$

$$f_3(x) = \sqrt{-2x+4}; D_3 =]-\infty; 2];$$



$$\text{Nullstelle: } -2x + 4 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$$

$$f_4(x) = \sqrt{-2x-2}; D_4 =]-\infty; -1]$$



$$\text{Nullstelle: } -2x - 2 = 0 \Rightarrow x_0 = -1$$

4 Anwendung von Wurzelfunktionen

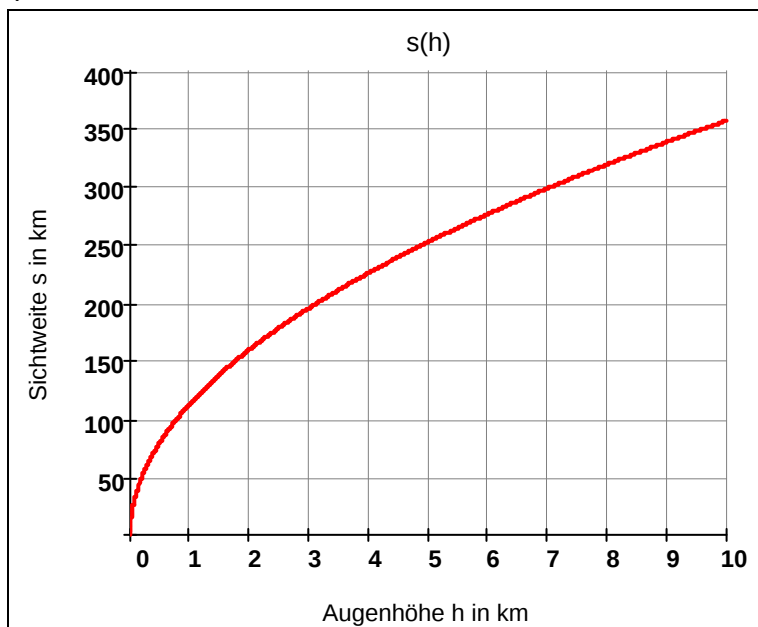
Aufgabe 1

Die Erde kann näherungsweise als Kugel angesehen werden. Die Sichtweite auf der Erde kann bei guten Bedingungen näherungsweise durch die Formel $s = 3,57 \cdot \sqrt{h}$ beschrieben werden. Dabei ist h die Augenhöhe in Meter und s die Sichtweite in km.

- Zeichnen Sie den Graphen zur Funktion s .
- Wie weit kann man bei einer Augenhöhe von 1,7 m bei klarem Wetter sehen?
Lösen Sie rechnerisch.
- Wie weit kann man von der obersten Plattform des Eiffelturms (276m), vom Mount Everest (8848m), von der ISS (380km) sehen?
- Wie hoch muss ein Berg sein, damit man 100 km weit sehen kann?

Lösung

a)



- $s(1,7) = 4,655$, man kann 4,655 km weit sehen.
- Sichtweite vom Eiffelturm: $s(276) = 59,3$; man sieht 59,3 km weit.

Sichtweite vom Mount Everest: $s(8848) = 335,8$; man sieht 335,8 km weit.

Sichtweite von der ISS: $s(380000) = 2201$; man sieht 2201 km weit.
- $s(h) = 100 \Leftrightarrow 3,57 \cdot \sqrt{h} = 100 \Leftrightarrow h = \left(\frac{100}{3,57}\right)^2 = 784$; der Berg muss 784 m hoch sein.

Aufgabe 2

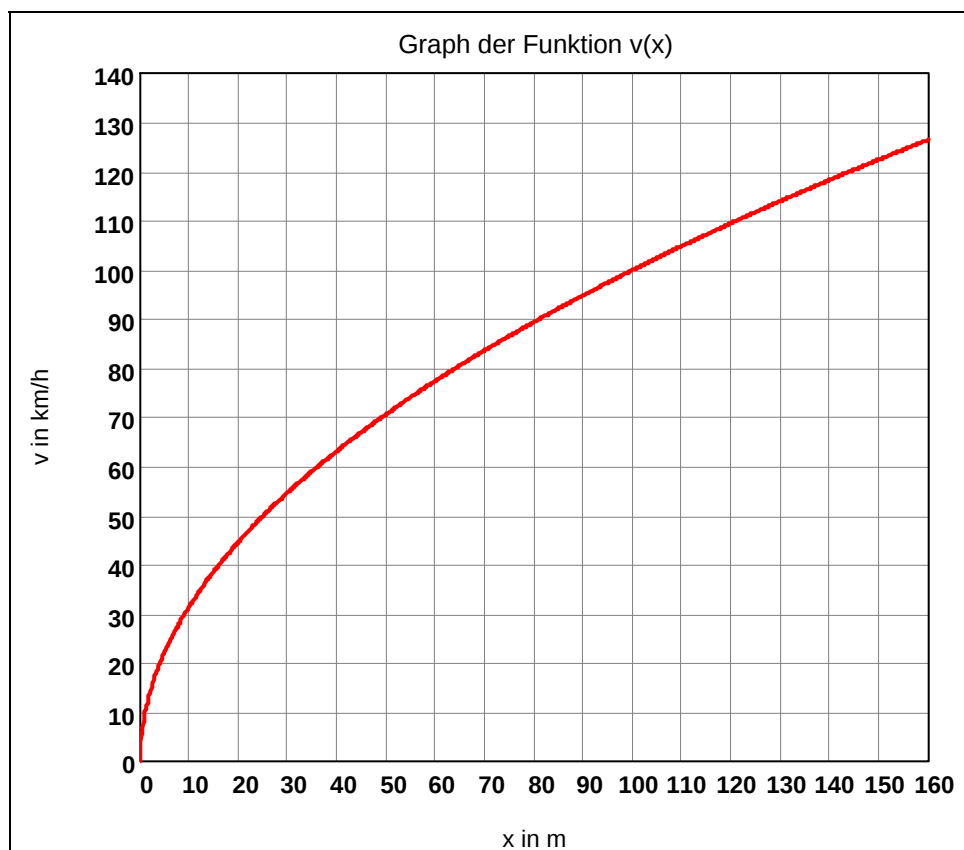
In der Fahrschule lernt man den Bremsweg s eines Autos in m, welches mit der Geschwindigkeit v in km/h fährt, mit der Faustregel $x = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ berechnet werden kann.

- a) Lösen Sie die Gleichung $x = \left(\frac{v}{10}\right)^2$ nach v auf.
- b) Geben Sie eine Funktion mit Definitionsmenge an, die beschreibt, welche Geschwindigkeit man bei einem bestimmten Bremsweg x gefahren sein muss und erstellen Sie eine graphische Darstellung.
- c) Mit welcher Geschwindigkeit v in km/h ist ein Auto, das eine Bremsspur von 20m, 40m, 60m, 80m, 100 m gemacht hat, gefahren?

Lösung

$$x = \left(\frac{v}{10}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{v}{10} \Leftrightarrow v = 10 \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow v(x) = 10 \cdot \sqrt{x}$$

Definitionsmenge: $D = [0; x_{\max}]$, wobei der Bremsweg nicht unendlich groß sein kann.



x in m	0	20	40	60	80	100
v in km/h	0	45	63	77	89	100