# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2006

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

**Teilaufgabe 1.0**

Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen $f_a$ mit $f_a(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot e^{a \cdot (3-x)}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

in der maximalen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$.

**Teilaufgabe 1.1 (4 BE)**

Bestimmen Sie die Nullstellen und untersuchen Sie, in Abhängigkeit von a, das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \to \infty$.

$$f(x, a) := \left(x^2 - 2 \cdot x\right) \cdot e^{a \cdot (3-x)}$$

Nullstellen: $x^2 - 2 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x - 2) = 0 \qquad \boxed{x_1 = 0} \qquad \boxed{x_2 = 2}$

$a > 0$

L. H.

$$\lim_{x \to \infty} \left[ \underbrace{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)}_{\downarrow \, \infty} \cdot \underbrace{e^{a \cdot (3-x)}}_{\downarrow \, 0} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{\overset{\infty}{\uparrow} x^2 - 2 \cdot x}{\underbrace{e^{a \cdot (x-3)}}_{\downarrow \, \infty}} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[ \frac{\overset{\infty}{\uparrow} 2 \cdot x - 2}{\underbrace{a \cdot e^{a \cdot (x-3)}}_{\downarrow \, \infty}} \right] = \blacksquare$$

L. H.

$$\blacksquare = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{\underbrace{a^2 \cdot e^{a \cdot (x-3)}}_{\downarrow \, \infty}} = 0$$

$a < 0$

$$\lim_{x \to \infty} \left[ \underbrace{\left(x^2 - 2 \cdot x\right)}_{\downarrow \, \infty} \cdot \underbrace{e^{a \cdot (3-x)}}_{\downarrow \, \infty} \right] \quad \text{annehmen}, a < 0 \quad \to \infty$$

**Teilaufgabe 1.2 (8 BE)**
Zeigen Sie, dass für die erste Ableitung von $f_a$ gilt:

$f'_a(x) = \left[-a\cdot x^2 + 2\cdot(a+1)\cdot x - 2\right]\cdot e^{a\cdot(3-x)}$ .

Für $a > 0$ existiert im I. Quadranten ein Punkt $P_a$ des Graphen von $f_a$, in dem die Tangente durch den Ursprung verläuft. Berechnen Sie die Abszisse $x_P$ des Punktes $P_a$ in Abhängigkeit von a.

$$f(x,a) := \left(x^2 - 2\cdot x\right)\cdot e^{a\cdot(3-x)}$$

$$f'_a(x) = (2\cdot x - 2)\cdot e^{a\cdot(3-x)} + \left(x^2 - 2\cdot x\right)\cdot(-a)\cdot e^{a\cdot(3-x)}$$

$$f'_a(x) = \left(-a\cdot x^2 + 2\cdot a\cdot x + 2\cdot x - 2\right)\cdot e^{a\cdot(3-x)} = \left[-a\cdot x^2 + 2\cdot(a+1)\cdot x - 2\right]\cdot e^{a\cdot(3-x)}$$

Gleichung der Tangente: $t(x) = f'_a\left(x_P\right)\cdot\left(x - x_P\right) + f_a\left(x_P\right)$

Durch (0/0): $f'_a\left(x_P\right)\cdot\left(-x_P\right) + f_a\left(x_P\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-a\cdot x_P^2 + 2\cdot(a+1)\cdot x_P - 2\right]\cdot e^{a\cdot\left(3-x_P\right)}\cdot\left(-x_P\right) + \left(x_P^2 - 2\cdot x_P\right)\cdot e^{a\cdot\left(3-x_P\right)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[-a\cdot x_P^2 + 2\cdot(a+1)\cdot x_P - 2\right]\cdot x_P = \left(x_P - 2\right)\cdot x_P$$

$$\Leftrightarrow \quad -a\cdot x_P^2 + 2\cdot(a+1)\cdot x_P - x_P = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -a\cdot x_P^2 + (2\cdot a + 1)\cdot x_P = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_P\left[-a\cdot x_P + (2\cdot a + 1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_p = 0 \quad \text{oder} \quad \boxed{x_P = \frac{2\cdot a + 1}{a}}$$

**Teilaufgabe 1.3**
Im Folgenden sei $\mathbf{a = 1}$. Es gilt: $\mathbf{f(x) = f_1(x)}$

$$f(x) := f(x,1) \rightarrow -e^{3-x} \cdot \left(2 \cdot x - x^2\right)$$

$$f'(x) := f'(x,1) \rightarrow -e^{3-x} \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 2\right)$$

**Teilaufgabe 1.3.1 (7 BE)**
Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph von $\mathbf{f}$ streng monoton steigt bzw. streng monoton fällt sowie die Art der Extrempunkte des Graphen von $\mathbf{f}$.

Waagrechte Tangenten:

$$f'(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 2 \\ 2 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad y0 := -10 .. 10$$

Vorzeichentabelle:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $- e^{3-x}$ | neg | neg | neg |
| $x^2 - 4x+2$ | pos | neg | pos |
| f '(x) | neg | pos | neg |
| $G_f$ | smf | sms | smf |
| | TP | HP | |

$G_f$ ist streng monoton fallend in $]-\infty\ ;\ 2-\sqrt{2}\,]$ und in $[\ 2+\sqrt{2}\ ;\ \infty\,[$.

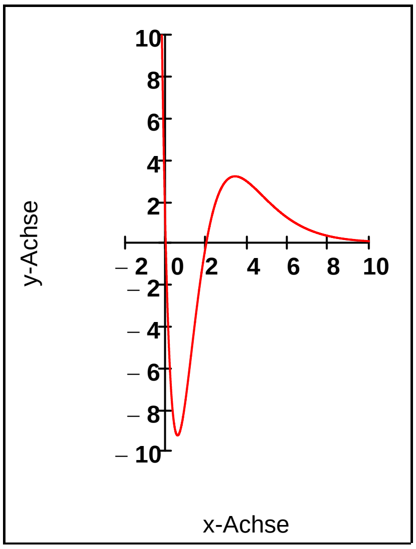
$G_f$ ist streng monoto steigend in $[\ 2-\sqrt{2}\ ;\ 2+\sqrt{2}\ ]$.

Tiefpunkt an der Stelle $\quad x_T := 2 - \sqrt{2}$

$$f\left(2-\sqrt{2}\right) = -9.3$$

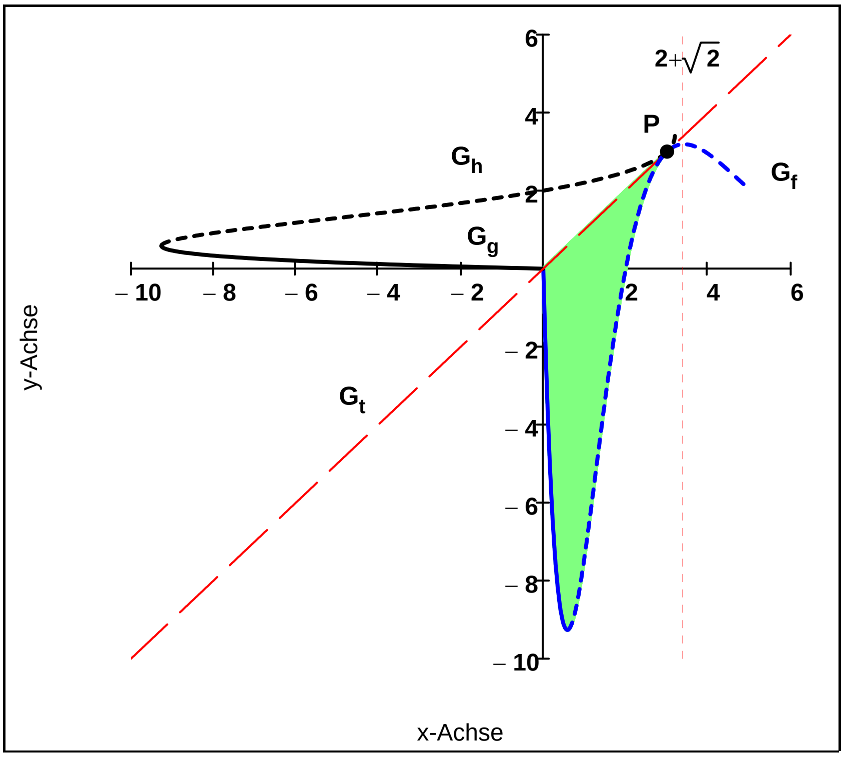
Hochpunkt an der Stelle $\quad x_H := 2 + \sqrt{2}$

$$f\left(2+\sqrt{2}\right) = 3.19$$



**Teilaufgabe 1.3.2** **(8 BE)**
Bildet man für $x \in [\ 0\ ;\ 2 - \sqrt{2}\ ]$ die Umkehrfunktion der Funktion **f**, dann ergibt sich die Funktion g. Bildet man für $x \in [\ 2 - \sqrt{2}\ ;\ 2 - \sqrt{2}\ ]$ die Umkehrfunktion der Funktion **f**, dann ergibt sich die Funktion h.
Zeichnen Sie für $0 \le x \le 5$ den Graphen der Funktion **f** in ein kartesisches Koordinatensystem ($-10 \le x \le 5 \wedge -10 \le y \le 5$). Zeichnen Sie außerdem in das Schaubild die Graphen der Funktionen g und h sowie die Tangente im Punkt $P_1(3\ /\ ?)$ an den Graphen von $f_1$. Verwenden Sie eine extra Seite für die Zeichnung. (1 LE = 1 cm)

Tangente: $t(x) := f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$ $\qquad t(x) = x$




| $x_d =$ | $f(x_d) =$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0.5 | -9.1 |
| 1 | -7.4 |
| 1.5 | -3.4 |
| 2 | 0 |
| 2.5 | 2.1 |
| 3 | 3 |
| 3.5 | 3.2 |
| 4 | 2.9 |
| 4.5 | 2.5 |
| 5 | 2 |

**Teilaufgabe 1.3.3** **(8 BE)**
Die Graphen von $f_1$, **g** und **h** begrenzen ein endliches Flächenstück. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild von Teilaufgabe 1.3.2 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächen-inhalts.

Die Graphen von h und f schneiden sich auf der Winkelhalbierenden, also auf der Tangente im Punkt P(3/3). Die gesuchte Fläche setzt sich aus zwei symmetrischen Teilflächen (eine Teilfläche grün schraffiert) zusammen.

$$A = 2\cdot\int_0^3 x - e^{3-x}\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\right)\,dx = 2\cdot\int_0^3 x\,dx - 2\cdot\int_0^3 e^{3-x}\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\right)\,dx$$

Nebenrechnung für: $\int e^{3-x}\cdot\left(x^2 - 2\cdot x\right)\,dx$

$u(x) := x^2 - 2\cdot x$ $\qquad$ $u'(x) = 2\cdot x - 2$

$v'(x) = e^{3-x}$ $\qquad$ $v(x) = -e^{3-x}$

$$\blacksquare = \left(2\cdot x - x^2\right)\cdot e^{3-x} + \int (2\cdot x - 2)\cdot e^{3-x}\,dx$$

$u(x) := 2\cdot x - 2$ $\qquad$ $u'(x) = 2$

$v'(x) = e^{3-x}$ $\qquad$ $v(x) = -e^{3-x}$

$$\blacksquare = \left(2\cdot x - x^2\right)\cdot e^{3-x} - (2\cdot x - 2)\cdot e^{3-x} + \int 2\cdot e^{3-x}\,dx$$

$$\blacksquare = \left(2\cdot x - x^2\right)\cdot e^{3-x} - (2\cdot x - 2)\cdot e^{3-x} - 2\cdot e^{3-x} = -x^2\cdot e^{3-x}$$

$$F(x) = 2\cdot\frac{x^2}{2} - 2\cdot\left(-x^2\cdot e^{3-x}\right) = x^2 + 2\cdot x^2\cdot e^{3-x}$$

Stammfunktion: $F(x) := x^2 + 2\cdot x^2\cdot e^{3-x}$

$A := F(3) - F(0) = 27$

**Teilaufgabe 2.0**
Gegeben ist die reelle Funktion h in der in IR maximalen Definitionsmenge $D_h$ durch

$h(x) = \arcsin\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)$.

**Teilaufgabe 2.1 (5 BE)**
Bestimmen Sie $D_h$, die Nullstellen von h und das Symmetrieverhalten des Graphen von h.

$$0 \le \sqrt{x^2 - 4} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \le x^2 - 4 \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

linke Seite: $0 \le x^2 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \ge 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \ge 2$ oder $x \le -2$

rechte Seite: $x^2 - 4 \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \le 5 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$

$$D_h = [\,-\sqrt{5}\,;\,-2\,] \cup [\,2\,;\,\sqrt{5}\,]$$

Nullstellen: $x^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 := -2 \qquad x_2 := 2$

$$h(-x) = \arcsin\left[\sqrt{(-x)^2 - 4}\right] = \arcsin\left(\sqrt{x^2 - 4}\right) = h(x)$$

$G_h$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

**Teilaufgabe 2.2 (6 BE)**
Ermitteln Sie das Verhalten von $h'(x)$ für $x \to 2$ und $x \to \sqrt{5}$ sowie die Wertemenge von h.

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(x^2 - 4\right)}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot x}{\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{\left(5 - x^2\right)} \cdot \sqrt{x^2 - 4}}$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\overset{\overset{2}{\uparrow}}{x}}{\underset{\underset{1}{\downarrow}}{\sqrt{\left(5 - x^2\right)}} \cdot \underset{\underset{0}{\downarrow}}{\sqrt{x^2 - 4}}} \to \infty \qquad \lim_{x \to 2^-} h'(x) = \infty$$

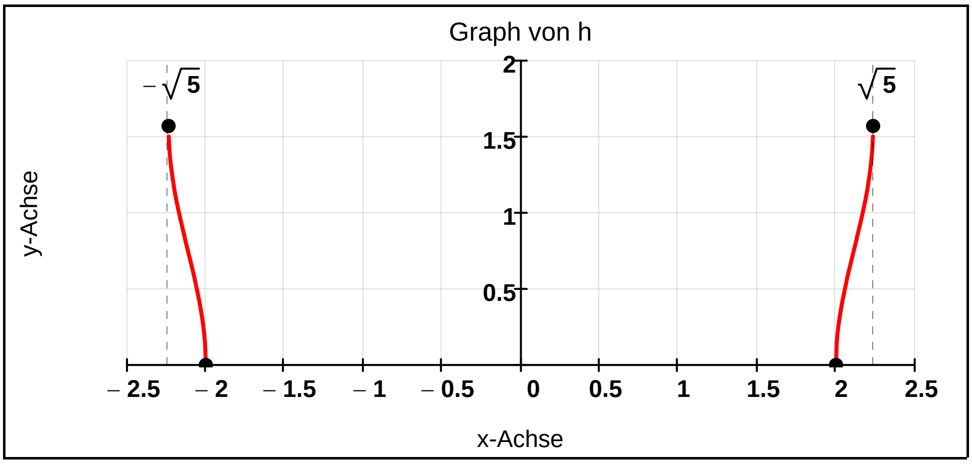
$$\lim_{x \to \sqrt{5}^-} \frac{\overset{\overset{\sqrt{5}}{\uparrow}}{x}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\sqrt{\left(5 - x^2\right)}} \cdot \underset{\underset{1}{\downarrow}}{\sqrt{x^2 - 4}}} \to \infty \qquad \lim_{x \to -\sqrt{5}^+} \frac{x}{\sqrt{\left(5 - x^2\right)} \cdot \sqrt{x^2 - 4}} \to -\infty$$

Wertemenge:

$h'(x) > 0$ für $x \in ]\, 2 ; \sqrt{5}\, [$ $\Rightarrow$ $G_h$ ist in $[\, 2 ; \sqrt{5}\, ]$ streng monoton steigend und stetig.

$G_h$ symmetrisch zur y-Achse.

$$h\left(-\sqrt{5}\right) \to \frac{\pi}{2} \qquad h\left(\sqrt{5}\right) \to \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad W = \left[\, 0 ; \frac{\pi}{2} \,\right]$$




**Teilaufgabe 2.3 (5 BE)**
Rotiert der Graph von h für $2 \le x \le \sqrt{5}$ um die y-Achse, dann entsteht ein rotationssymmetrischer Körper mit dem Volumeninhalt V. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumeninhalts.

$$V_y = \pi \cdot \int_{2}^{\sqrt{5}} x^2 \, dy \qquad V_x = \pi \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} y^2 \, dx = \pi \cdot \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (u(x))^2 \, dx$$

Funktionsgleichung: $y = \arcsin\left(\sqrt{x^2 - 4}\right)$

Variablen vertauschen: $x = \arcsin\left(\sqrt{y^2 - 4}\right)$

Auflösen: $\sin(x) = \sqrt{y^2 - 4}$ $\quad (\sin(x))^2 = y^2 - 4$

Wurzel ziehen: $y_1(x) = -\sqrt{(\sin(x))^2 + 4}$ $\quad y_2 = \sqrt{(\sin(x))^2 + 4}$

Definitionsmenge der Umkehrfunktion: $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

Wertemenge der Umkehrfunktion: $2 \le x \le \sqrt{5}$

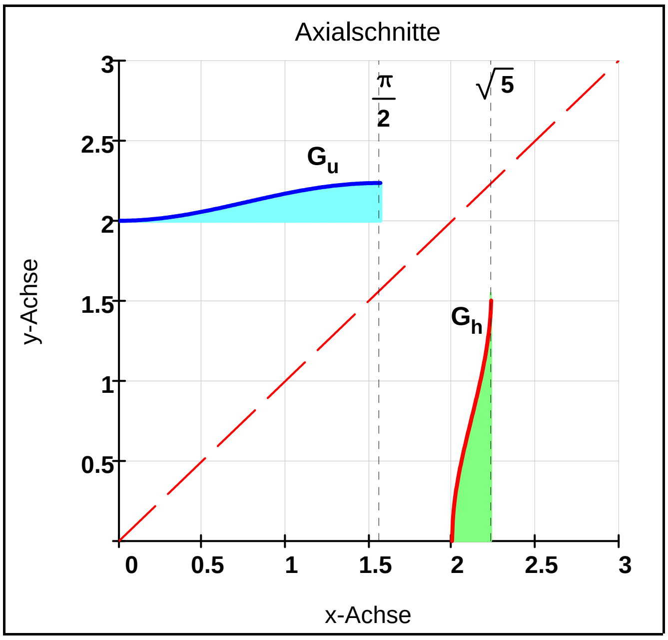
Umkehrfunktion: $u(x) := \sqrt{(\sin(x))^2 + 4}$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin(x))^2 + 4\right] dx$$

$$\int \left[(\sin(x))^2 + 4\right] dx = \int \left[\frac{1}{2}\cdot(1 - \cos(2x)) + 4\right] dx = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{4}\cdot \sin(2\cdot x) + 4\cdot x$$

$$V_x = \pi \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\cdot\sin(\pi) + 2\cdot\pi - \left(\frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{4}\cdot\sin(0) + 4\cdot 0\right)\right] = \frac{9}{4}\cdot\pi^2$$

Axialschnitt



**Teilaufgabe 3.0**
Beim radioaktiven Zerfall von Uran entsteht Helium. Die zeitabhängige Masse m(t) des Heliums zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(0) = 0$ erfüllt die Differentialgleichung

$$m'(t) = \left(\frac{4 \cdot m_0}{235} - m(t)\right) \cdot \lambda.$$

Dabei ist $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante, $m_0$ ist die Masse des Urans zum Zeitpunkt $t = 0$ und $m'(t)$ ist die Ableitung von $m(t)$ nach der Zeit.

**Teilaufgabe 3.1 (6 BE)**
Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.
[ Ergebnis: $m(t) = \frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$ ]

Gegebene DGL: $$m' = \left(\frac{4 \cdot m_0}{235} - m\right) \cdot \lambda$$

Definition: $$k = \frac{4 \cdot m_0}{235}$$

Differentialquotient: $$\frac{dm}{dt} = (k - m) \cdot \lambda$$

Trennen der Variablen: $$\frac{dm}{k - m} = \lambda \cdot dt \qquad \frac{dm}{m - k} = -\lambda \cdot dt$$

Integration: $$\int \frac{1}{m - k}\, dm = \int -\lambda\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|m - k|) = -\lambda \cdot t + c$$

Delogarithmieren: $$|m - k| = e^{-(\lambda \cdot t) + c}$$

Da m<k: $$m - k = -C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Allgemeine Lösung: $$m(t) = k - C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

**Teilaufgabe 3.2** **(3 BE)**
Ermitteln Sie das Verhalten von m(t) für $t \rightarrow \infty$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für den beschriebenen Zerfallsvorgang?

Einsetzen der Randbedingung: $m(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k - C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = C$

Spezielle Lösung: $m(t) = k - k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$m(t) = \frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - \underbrace{e^{-\lambda \cdot t}}_{\to 0}\right)\right] = \frac{4 \cdot m_0}{235}$$

Es entsteht auf lange Sicht eine Masse $\frac{4 \cdot m_0}{235}$ an Helium.