Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2006

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Bei einem Fußballturnier werden 8 Gruppen zu je vier Mannschaften gebildet. In jeder Gruppe sind je zwei Mannschaften festgesetzt, die restlichen 2 Mannschaften werden durch Los aus den 16 nicht gesetzten Mannschaften ausgewählt.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Gruppenbildungen bei diesem Losentscheid.

$$\binom{16}{2}\cdot\binom{14}{2}\cdot\binom{12}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2} = 120\cdot 91\cdot 66\cdot 45\cdot 28\cdot 15\cdot 6\cdot 1 = 8.173\times 10^{10}$$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
In der Vorrunde muss jede Mannschaft einer Gruppe gegen jede andere Mannschaft dieser Gruppe spielen. Bestimmen Sie die Anzahl der Vorrundenspiele.

Spiele pro Gruppe: $\binom{4}{2} = 6$

Spiele insgesamt in 8 Gruppen: $6\cdot 8 = 48$

Teilaufgabe 2.0
Für das Turnier werden Fußbälle benötigt, die besonders strenge Anforderungen erfüllen müssen, so muss z. B. die Masse zwischen 415 g und 435 g betragen. Ein Hersteller produziert Fußbälle, deren Masse annähernd normalverteilt ist mit dem Mittelwert 425 g.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Wie groß darf die Standardabweichung der Masse höchstens sein, damit der Hersteller höchstens 10% Ausschuss erhält?

$\mu := 425$

$$P(415 < X < 435) \ge 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{435-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{415-\mu}{\sigma}\right) \ge 0.90$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-10}{\sigma}\right) \ge 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right)\right) \ge 0.90$$

$$2\cdot\Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{10}{\sigma}\right) \ge 0.95$$

TW $\quad \frac{10}{\sigma} \ge 1.645 \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \le \frac{10}{1.645}$ **Gleitkommazahl**, 3 $\rightarrow \sigma \le 6.08$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Um die Aussage des Herstellers, dass die Produktion höchstens 10% Ausschuss enthält, zu überprüfen, wird zunächst eine Lieferung von 30 Fußbällen angefordert. Beschreiben Sie einen Signifikanztest mit dem Niveau 2,5%, wobei die Nullhypothese die Aussage des Herstellers ist.
Bestimmen Sie die Entscheidungsregel.

Testgröße: X: Anzahl der Ausschussfußbälle unter $n := 30$. $p := 0.1$

Nullhypothese H_0: $p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.1$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.1$

Annahmebereich: $A = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ k+1, k+2, ..., 30 \}$

$$P(\overline{A}) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \ge k+1) \le 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le k) \le 0.025$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \le k) \ge 0.975 \quad \text{TW} \quad \sum_{i=0}^{k} B(30, 0.1, i) = 0.99222 \quad \Rightarrow \quad k = 7$$

$$A = \{ 0, 1, 2, ..., 7 \} \qquad \overline{A} = \{ 8, 9, ..., 30 \}$$

Falls mehr als 7 Bälle Ausschussware sind, wird dem Hersteller nicht geglaubt und dessen Aussage verworfen.

Teilaufgabe 2.3 (7 BE)
Für das Turnier werden 600 einwandfreie Bälle benötigt. Berechnen Sie, wie viele Bälle man bei einer Ausschusswahrscheinlichkeit von 10% mindestens bestellen muss damit mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit genügend viele Bälle zur Verfügung stehen.

Einwandfreie Bälle: $p := 0.9$ n unbekannt

$$\mu = n \cdot 0.9 \qquad \sigma = \sqrt{0.0 \cdot n \cdot 0.1} = 0.3 \cdot \sqrt{n}$$

$$P(X \ge 600) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 599) \ge 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 599) \le 0.05$$

$$\Phi\left(\frac{599 - 0.9 \cdot n + 0.5}{0.3 \cdot \sqrt{n}}\right) \le 0.05 \quad \text{TW} \quad \frac{599 - 0.9 \cdot n + 0.5}{0.3 \cdot \sqrt{n}} \le -1.645$$

$$599 - 0.9 \cdot n + 0.5 \le -1.645 \cdot 0.3 \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$$0.9 \cdot z^2 - 0.4935 \cdot z - 599.5 \geq 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow -\infty < z \leq -25.54 \vee 26.08 \leq z < \infty$$

$n \geq 26.08^2 \rightarrow 0$ aufrunden: $n \geq 681$

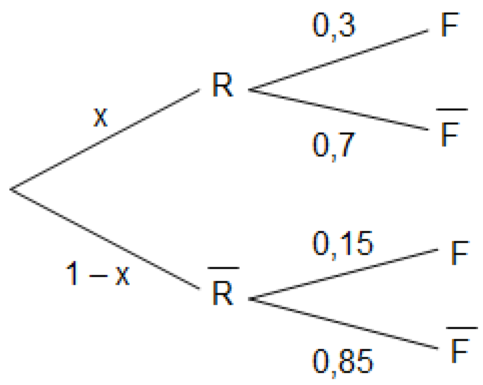
Teilaufgabe 3.0
Eine Sportzeitschrift veranstaltet ein Fußballquiz. 24% der Quizteilnehmer sind Frauen. 30% der richtigen und 15% der falschen Lösungen sind von Frauen eingereicht werden

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Bestimmen Sie den Anteil der richtigen Lösungen. [Ergebnis: 60%]

Bezeichnungen:

Frau: F richtig: R

Mann: $\overline{F}$ falsch: $\overline{R}$



Gegeben:

$P_R(F) = 0.3$ $P(F) = 0.24$

$P_{\overline{R}}(F) = 0.15$

Lösung:

$$P(F) = P(R) \cdot P(F) + P(\overline{R}) \cdot P(F)$$

$$0.24 = x \cdot 0.3 + (1 - x) \cdot 0.15$$

$$0.15 \cdot x = 0.24 - 0.15 = 0.09 \quad \Rightarrow \quad x := \frac{0.09}{0.15} \qquad x = 0.6$$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Ermitteln Sie, welcher Anteil der von Männern eingereichten Lösungen falsch war.

$$P_{\overline{F}}(\overline{R}) = \frac{P(\overline{F} \cap \overline{R})}{P(\overline{F})} = \frac{(1 - 0.60) \cdot 0.85}{1 - 0.24} = 0.447$$

Teilaufgabe 3.3.0
Unter allen Teilnehmern sollen 10 Freikarten verlost werden.

Teilaufgabe 3.3.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Männer alle Freikarten bekommen.

alle Männer = keine Frau

$$B(10, 0.24, 0) = \binom{10}{0} \cdot 0.24^0 \cdot 0.76^{10} = 0.76^{10} = 0.06429 \qquad 0.76^{10} = 0.06429$$

Teilaufgabe 3.3.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frauen mehr als ein Viertel der Freikarten bekommen.

ein Viertel der Freikarten: $\frac{10}{4} = 2.5$

$$P(X > 2.5) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2))$$

$$= 1 - \left[0.06429 + \binom{10}{1} \cdot 0.24^1 \cdot 0.76^9 + \binom{10}{2} \cdot 0.24^2 \cdot 0.76^8\right]$$

$$= 1 - 0.06429 - 0.20302 - 0.28850 = 0.44419$$

Nebenrechnungen:

$$\text{combin}(10, 1) \cdot 0.24^1 \cdot 0.76^9 = 0.20302$$

$$\text{combin}(10, 2) \cdot 0.24^2 \cdot 0.76^8 = 0.28850$$

Teilaufgabe 4 (5 BE)
Erfahrungsgemäß wünschen 65% der Zuschauer einen Sitzplatz im Stadion. Wie viele Sitzplätze muss ein Stadion mit 75000 Plätzen mindestens haben, damit bei ausverkauftem Stadion die Anzahl der Sitzpltze mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit ausreicht.

$$n := 75000 \qquad p := 0.65 \qquad \mu := n \cdot p = 48750 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 130.624$$

$$P(X \leq k) \geq 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.90$$

TW $\quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 1.281 \ \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, k \\ \text{Gleitkommazahl}, 6 \end{array} \right. \rightarrow 48916.8 \leq k < \infty$

Das Stadion sollte mindestens $\text{ceil}(48916.8) = 48917$ Sitzplätze haben.