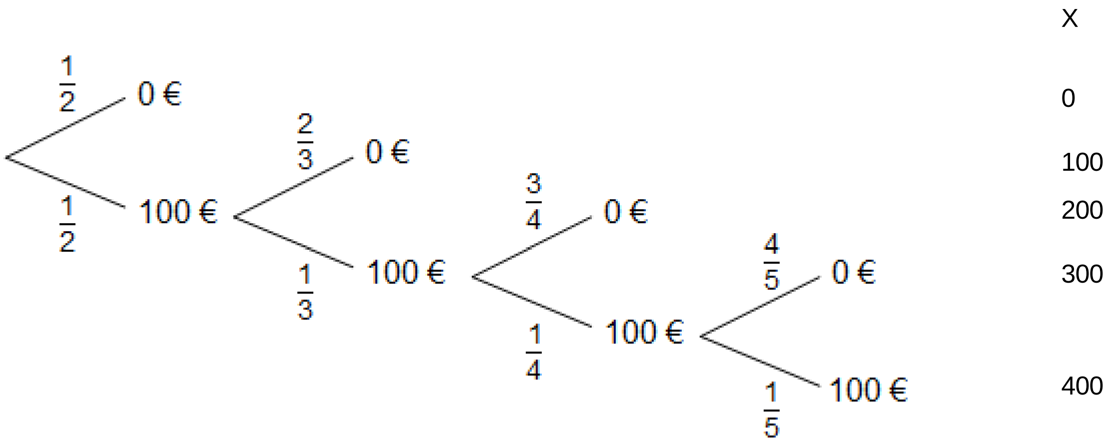
Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2006

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Im Rahmen einer Werbesendung wird ein Gewinnspiel durchgeführt. Dafür wird ein Kandidat zufällig aus dem Publikum ausgewählt. Dieser muss sich in der ersten Runde zwischen zwei gleich aussehenden Umschlägen entscheiden, doch nur in einem steckt ein Gewinn von 100 €. Wählt er den leeren, so ist das Gewinnspiel vorbei, andernfalls kommt er in die nächste Runde. Gespielt wird maximal vier Runden. In Runde n gibt es immer nur einen Umschlag mit 100 € und zusätzlich n genauso aussehende leere Umschläge zur Auswahl.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Fertigen Sie ein Baumdiagramm für dieses Gewinnspiel an und zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Kandidat spätestens in der dritten Runde ausscheidet, $\frac{23}{24}$ ist.



A: Der Kandidat scheidet spätestens in der dritten Runde aus:

$$P(A) := \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} \qquad \boxed{P(A) = \frac{23}{24}}$$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Berechnen Sie den Einsatz, den ein Kandidat zahlen müsste, damit man dieses Spiel im stochastischen Sinn als fair bezeichnen kann.

Zufallsgröße X: Ausbezahlter Gesamtgewinn in €.

Mithilfe des Baumdiagramms:

$$P(X = 0) = \frac{1}{2} \qquad P(X = 100) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \qquad P(X = 200) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = 300) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{5} = \frac{1}{30} \qquad P(X = 400) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{120}$$

Erwartungswert:

$$\mu := 0\cdot\frac{1}{2} + 100\cdot\frac{1}{3} + 200\cdot\frac{1}{8} + 300\cdot\frac{1}{30} + 400\cdot\frac{1}{120} \qquad \mu = 71.667$$

Zahlt ein Kandidat für jedes Gewinnspiel einen Einsatz von 71,67 €, so ist das Spiel fair.

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Dieses Gewinnspiel wird nun sechsmal nacheinander durchgeführt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es dabei kein Kandidat schafft, in die letzte Runde zu kommen. Berechnen Sie auch die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Kandidaten in die letzte Runde kommen, aber keiner in der ersten Durchführung.

Ereignis B: Ein beliebiger Kandidat kommt in die letzte Runde:

Zufallsgröße Y: Anzahl der Kandidaten aus den 6 Kandidaten, die in die letzte Runde kommen.

$$P(\overline{B}) = \frac{23}{24} \quad \Rightarrow \quad p_Y := 1 - \frac{23}{24} = \frac{1}{24}$$

$$P(Y = 0) = \binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^0\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^6 = 1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^6 = 0.775$$

Zufallsgröße Z: Anzahl der Kandidaten aus den restlichen 5 Kandidaten, die in die letzte Runde kommen.

keiner in der ersten Durchführung:

$$P(\overline{B}) = \frac{23}{24}$$

zwei in die letzte Runde: $\Rightarrow$ $p_Z = \frac{1}{24}$

$$P(Z \geq 2) = 1 - P(Z \leq 1) = 1 - (P(Z = 0) + P(Z = 1))$$

$$1 - \left[\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^0\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^5 + \binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^4\right] = 1 - \left[1\cdot1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^5 + 5\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^4\right] = 0.016$$

zwei in die letzte Runde, aber nicht bei der ersten Runde:

$$P(\overline{B})\cdot P(Z \geq 2) = \frac{23}{24}\cdot\left[1 - \left[1\cdot1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^5 + 5\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^1\cdot\left(\frac{23}{24}\right)^4\right]\right] = 0.015$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
In einer bestimmten Sendung besteht das Publikum zu 55% aus Frauen. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bayerischer Kandidat ein Mann ist, 60%.
(Bezeichnung: W: *Kandidat ist weiblich*; B: *Kandidat ist bayerisch*).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Kandidat aus Bayern kommt, und überprüfen Sie die Ereignisse W und B auf stochastische Unabhängigkeit.

Gegeben: $P(W) = 0.55$ $\quad P_W(B) = 0.05$ $\quad P_B(\overline{W}) = 0.60$

Lösung: $$P_W(B) = \frac{P(W \cap B)}{P(W)} \quad \Leftrightarrow \quad P(W \cap B) = P_W(B) \cdot P(W)$$

$$P_B(W) = \frac{P(B \cap W)}{P(B)} \quad \Leftrightarrow \quad P(B \cap W) = P_B(W) \cdot P(B)$$

$$P(W \cap B) = P(B \cap W) \quad \Leftrightarrow \quad P_W(B) \cdot P(W) = P_B(W) \cdot P(B)$$

Auflösen: $$P(B) = \frac{P_W(B) \cdot P(W)}{P_B(W)} = \frac{0.05 \cdot 0.55}{0.40} = 0.06875$$

$P_B(W) = 0.40$ ungleich $P(W) = 0.55$

$\Rightarrow$ stochastisch abhängig

oder: $P_W(B) = 0.05$ ungleich $P(B) = 0.06875$

Teilaufgabe 2.0
Um die Notwendigkeit einer Umgehungsstraße zu untersuchen, wird an einer stark befahrenen Straße täglich zwischen 6:30 Uhr und 7:30 Uhr eine Verkehrszählung durchgeführt. An dem Kontrollpunkt werden werktags im Mittel 765 Kraftfahrzeuge gezählt. Man geht davon aus, dass die Anzahl X der täglich gezählten Fahrzeuge normalverteilt ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Tag die Zählung um mehr als 10% vom Erwartungswert abweicht, beträgt 5%.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Ermitteln Sie die Standardabweichung von X.

Erwartungswert: $\mu = 765$ $\quad$ 10%: $0.1 \cdot 765 = 76.5$

$$P(|X - \mu| > 76.5) = 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(688.5 < X < 841.5) = 0.05$$

Aufteilung in zwei symmetrische Bereiche, kontinuierliche Normalverteilung:

$$P(X < 688.5) = 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{688.5 - \mu}{\sigma}\right) = 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{-76.5}{\sigma}\right) = 0.025$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \Phi\left(\frac{76.5}{\sigma}\right) = 0.025 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{76.5}{\sigma}\right) = 0.975$$

TW $\quad \frac{76.5}{\sigma} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \sigma := \frac{76.5}{1.96} \quad \sigma = 39.03$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Berechnen Sie, die Mindestanzahl der Tage, an denen man eine Verkehrszählung durchführen müsste, damit an mindestens einem Tag eine Abweichung der Fahrzeuganzahl vom Erwartungswert um höchstens 10% mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99,9% auftritt.

Angabe Aufg. 2:
Ereignis C: Die Tageszählung weicht um mehr als 10% vom Erwartungswert ab: $\quad P(C) = 0.05$

Gegenereignis $\overline{C}$: Die Tageszähung weicht um höchstens 10% vom Erwartungswert ab.

$$P(Y \geq 1) \geq 0.999 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(Y = 0) \geq 0.999 \quad \Leftrightarrow \quad P(Y = 0) \leq 0.001$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0.95^0 \cdot 0.05^n \leq 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad 0.05^n \leq 0.001$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.05) \leq \ln(0.001) \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.05)}$$

$n := \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.05)} = 2.306 \quad$ aufrunden: $\quad n \geq 3$

Man müsste die Verkehrszählung also an mindestens drei Tagen durchführen.

Teilaufgabe 3.0
Ein Limonadenhersteller behauptet, er hätte bei jeder zwanzigsten Flasche derselben Sorte eine Gewinnnummer auf der Innenseite der Flaschendeckel anbringen lassen, welche den Käufer bei Vorlage dieses Deckels zur Abholung eines attraktiven Sachgewinns berechtigt.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Um die Aussage des Herstellers mit Hilfe eines einseitigen Hypothesentests zu überprüfen, beschließt eine Gruppe von Verbraucherschützern, 200 derartige Flaschen zu untersuchen. Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese für diesen Test an und ermitteln Sie auf einem Signifikanzniveau von 1% den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße X: Anzahl der Flaschendeckel mit Gewinnnummer unter $n := 200$ untersuchten Flaschen.

$$p := \frac{1}{20} = 0.05$$

Linksseitiger Signifikanztest

Nullhypothese H_0: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.05$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.05$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 0.01$

Annahmebereich: $A = \{\, k+1, k+2, \ldots, 500 \,\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, 2, \ldots, k \,\}$

$P(\overline{A}) \leq 0.01 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.01 \quad \xrightarrow{\text{TW}} \quad k \leq 3$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, 2, 3 \,\}$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Aufgrund von Kundenreaktionen zweifelt der Limonadenhersteller an der Einhaltung der Gewinnwahrscheinlichkeit bei den zugelieferten Flaschendeckeln. Ermitteln Sie für eine Stichprobenlänge von 300 Flaschendeckeln für einen zweiseitigen Test einen möglichst großen zum Erwartungswert symmetrischen Ablehnungsbereich für die Nullhypothese $p = 0.05$ auf einem Signifikanzniveau von 4%.

Testgröße Y: Anzahl der Flaschendeckel mit Gewinnnummer unter $n := 300$ untersuchten Flaschen.

$$p := \frac{1}{20} = 0.05$$

Zweiseitiger Signifikanztest

Nullhypothese H_0: $p_0 = p \rightarrow p_0 = 0.05$

Gegenhypothese H_1: $p_1 \neq p \rightarrow p_1 \neq 0.05$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 0.04$

Annahmebereich: $A = \{\ \mu - c + 1, \mu - c + 2, ..., \mu + c - 1\ \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ 0, 1, ..., \mu - c\ \} \cup \{\ \mu + c, ..., 300\ \}$

$\mu := n \cdot p = 15$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3.775$ >3, Näherung durch NV möglich

$$P(Y \le \mu - c) \le \frac{0.04}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{\mu - c - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.02$$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{-c + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.02 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(-\frac{c - 0.5}{\sigma}\right) \le 0.02$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \Phi\left(\frac{c - 0.5}{\sigma}\right) \le 0.02 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{c - 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.98$$

TW $\frac{c - 0.5}{\sigma} \ge 2.06$ auflösen, $c \rightarrow 8.276329468328872294 \le c < \infty$

aufrunden: $c \ge 9$ $c_{min} := 9$

untere Grenze: $\mu - c_{min} = 6$

obere Grenze: $\mu + c_{min} = 24$

größtmöglicher Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ 0, 1, ..., 6\ \} \cup \{\ 24, 25, ..., 300\ \}$