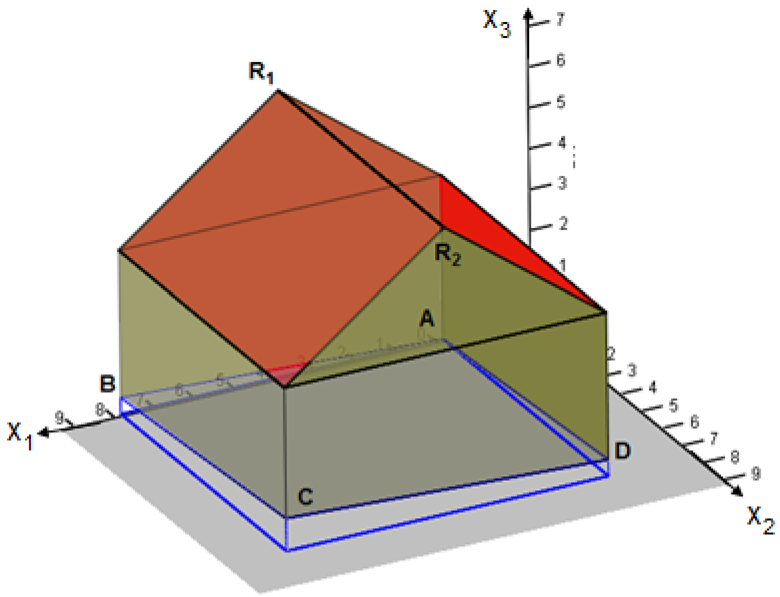
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Die folgenden Informationen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem des R^3.
Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils 1 LE = 1 m.
Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden. Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.
An einem Hang soll eine Scheune errichtet werden mit den Eckpunkten A(0/0/0), B(8/0/0,4), C(8/8/0,8) und D(0/8/0,4), die in einer Ebene liegen. Die vier Seitenwände der Scheune verlaufen senkrecht zur x_1x_2-Ebene. Die Scheune soll in dem Viereck ABCD in den Hang hineinragen und ihr Boden soll in der x_1x_2-Ebene verlaufen, weshalb ein Teil des Hanges abgetragen werden muss.



Teilaufgabe 1.1 **(7 BE)**

Zeigen Sie, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm, aber kein Rechteck ist, und berechnen Sie dessen Flächeninhalt. Berechnen Sie auch das Volumen der Erde, die vom Hang abgetragen werden muss.

Gegeben: $\mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{OB} := \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{OC} := \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{OD} := \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Zu zeigen: $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{DC}}$ $\qquad \overrightarrow{\mathbf{AB}}$ nicht senkrecht $\overrightarrow{\mathbf{DC}}$.

$$\mathbf{AB} := \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{DC} := \mathbf{OC} - \mathbf{OD} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$AB \cdot DC = \frac{1604}{25}$ ungleich 0, also nicht senkrecht

Fläche des Parallelogramms: $AD := OD - OA = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0.4 \end{pmatrix}$ $AB \times AD = \begin{pmatrix} -\frac{16}{5} \\ -3.2 \\ 64 \end{pmatrix}$

$A_{ABCD} := |AB \times AD|$ $\boxed{A_{ABCD} = 64.16}$

Koordinaten von C: C(8/8/0,8)

$V := \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot 0.8$ $\boxed{V = 25.6}$

Teilaufgabe 1.2.0
Die eine Dachfläche liegt in der Ebene **E:** $-3x_1 + 4x_3 = 16$. In der anderen Dachfläche liegen die Punkte U(6/1/5,5), V(4/4/7) und W(8/6/4), durch welche auch die Ebene F festgelegt wird.
Die beiden Dachflächen treffen im Dachfirst aufeinander und werden durch die Seitenwände der Scheune begrenzt.

Teilaufgabe 1.2.1 (8 BE)
Beschreiben Sie die Lage der Ebene E im Koordinatensystem und ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Parameterform. Stellen Sie außerdem die Gleichung der Ebene F in parameterfreier Form auf.
[Mögliches Teilergebnis: **F:** $1.5x_1 + 2x_3 = 20$]

$x_2 = 0 \Rightarrow$ E || x_2-Achse (echt parallel, da die Konstante ungleich 0).

Ebene E: $E(x_1, x_2, x_3) := -3x_1 + 4x_3 - 16$

Wahl der Punkte:

$$E(1, 0, x_3) = 0 \rightarrow 4 \cdot x_3 - 19 = 0 \text{ auflösen}, x_3 \rightarrow \frac{19}{4}$$

$$E(x_1, 0, 0) = 0 \rightarrow -3 \cdot x_1 - 16 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow -\frac{16}{3}$$

$$E(x_1, 5, 1) = 0 \rightarrow -3 \cdot x_1 - 12 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow -4$$

$$OP := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{19}{4} \end{pmatrix} \quad OQ := \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad OR := \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$OQ - OP = \begin{pmatrix} -\frac{19}{3} \\ 0 \\ -\frac{19}{4} \end{pmatrix} \qquad u := \frac{12}{19}\cdot(OQ - OP) = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$OR - OP = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \qquad v := \frac{4}{5}\cdot(OR - OP) = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Mögliche Parameterdarstellung der Ebene E:

$$E_p(\lambda,\mu) := OP + \lambda\cdot u + \mu\cdot v \qquad E_p(\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} 1 - 4\cdot\lambda - 4\cdot\mu \\ 4\cdot\mu \\ \frac{19}{4} - 3\cdot\lambda - 3\cdot\mu \end{pmatrix}$$

Gegeben: $OU := \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$ $\quad OV := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad OW := \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

Ebene F: $n_F := (OV - OU) \times (OW - OU) = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix}$

Normalenform: Koordinatenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - OU\right]\cdot\frac{n_F}{8} = 0 \rightarrow 20 - 2\cdot x_3 - \frac{3\cdot x_1}{2} = 0 \qquad F:\ 1.5\cdot x_1 + 2\cdot x_3 = 20$$

Teilaufgabe 1.2.2 (5 BE)
Berechnen Sie die Neigungswinkel $ß_E$ und $ß_F$ der beiden Dachflächen bzgl. der x_1x_2-Ebene und den Winkel γ, unter dem beide Dachflächen aufeinandertreffen.

$$n_E := \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad n_F := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Neigungswinkel von E:

$$\beta_E := \mathrm{acos}\left(\frac{|n_E \cdot e_3|}{|n_E| \cdot |e_3|}\right) \qquad \boxed{\beta_E = 36.9 \cdot °}$$

Neigungswinkel von F:

$$\beta_F := \mathrm{acos}\left(\frac{|n_F \cdot e_3|}{|n_F| \cdot |e_3|}\right) \qquad \boxed{\beta_F = 36.9 \cdot °}$$

Spitzer Winkel zwischen den Ebenen:

$$\gamma_0 := \mathrm{acos}\left(\frac{n_E \cdot n_F}{|n_E| \cdot |n_F|}\right) \qquad \boxed{\gamma_0 = 73.7 \cdot °}$$

Neigungswinkel der Dachflächen:

$$\gamma := 180° - \gamma_0 \qquad \boxed{\gamma = 106.3 \cdot °}$$

oder über die Winkelsumme im Dreieck:

$$\gamma := 180° - \beta_E - \beta_F \qquad \gamma = 106.26 \cdot °$$

Teilaufgabe 1.2.3 (5 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden Endpunkte R_1 und R_2 des Dachfirsts.

Schnittgerade der Ebenen:

$$M := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 & 16 \\ \frac{3}{2} & 0 & 2 & 20 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{zref}(M) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \Rightarrow & x_1 = 4 \\ \Rightarrow & x_3 = 7 \end{matrix} \qquad x_2 \text{ beliebig}$$

Punkt der Schnittgeraden:

$$OS := \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Richtung der Schnittgeraden:

$$u_S := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittgerade:

$$x_g(\tau) := OS + \tau \cdot u_S = \begin{pmatrix} 4 \\ \tau \\ 7 \end{pmatrix}$$

R_1 liegt über der x_1-Achse: $R_1(.../0\ /...)$

$$\tau_1 := x_g(\tau)_2 = 0 \rightarrow \tau = 0 \ \text{auflösen}, \tau \ \rightarrow 0$$

$$OR_1 := x_g(\tau_1) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \boxed{R_1 := OR_1^T \rightarrow (4 \quad 0 \quad 7)}$$

R_2 liegt bei x_2=8: R_2(.../8 /...)

$$\tau_2 := x_g(\tau)_2 = 8 \rightarrow \tau = 8 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow 8$$

$$OR_2 := x_g(\tau_2) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad R_2 := OR_2^T \rightarrow (4 \quad 8 \quad 7)$$

Teilaufgabe 1.2.4 (5 BE)
Die Dachflächen sollen nun über die Scheunenwände hinaus verlängert werden. Zur Stabilisierung werden Stützbalken zwischen den Seitenwänden und den verlängerten Dachflächen angebracht. Eine dieser Stützen soll an einer Seitenwand im Punkt P(0/4/3) angebracht werden. Berechnen Sie die Mindestlänge dieser Stütze und bestimmen Sie den anderen Endpunkt L dieser Stütze.

Anhand der Skizze sieht man: Die Aufgabe bezieht sich auf die Ebene E:

Lotgerade zu E durch P: $OP := \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad x_l(\sigma) := OP + \sigma \cdot n_E = \begin{pmatrix} -3\cdot\sigma \\ 4 \\ 4\cdot\sigma + 3 \end{pmatrix}$

l ∩ E:

$$\sigma_E := E\left(x_l(\sigma)_1, x_l(\sigma)_2, x_l(\sigma)_3\right) = 0 \rightarrow 25\cdot\sigma - 4 = 0 \text{ auflösen}, \sigma \rightarrow \frac{4}{25}$$

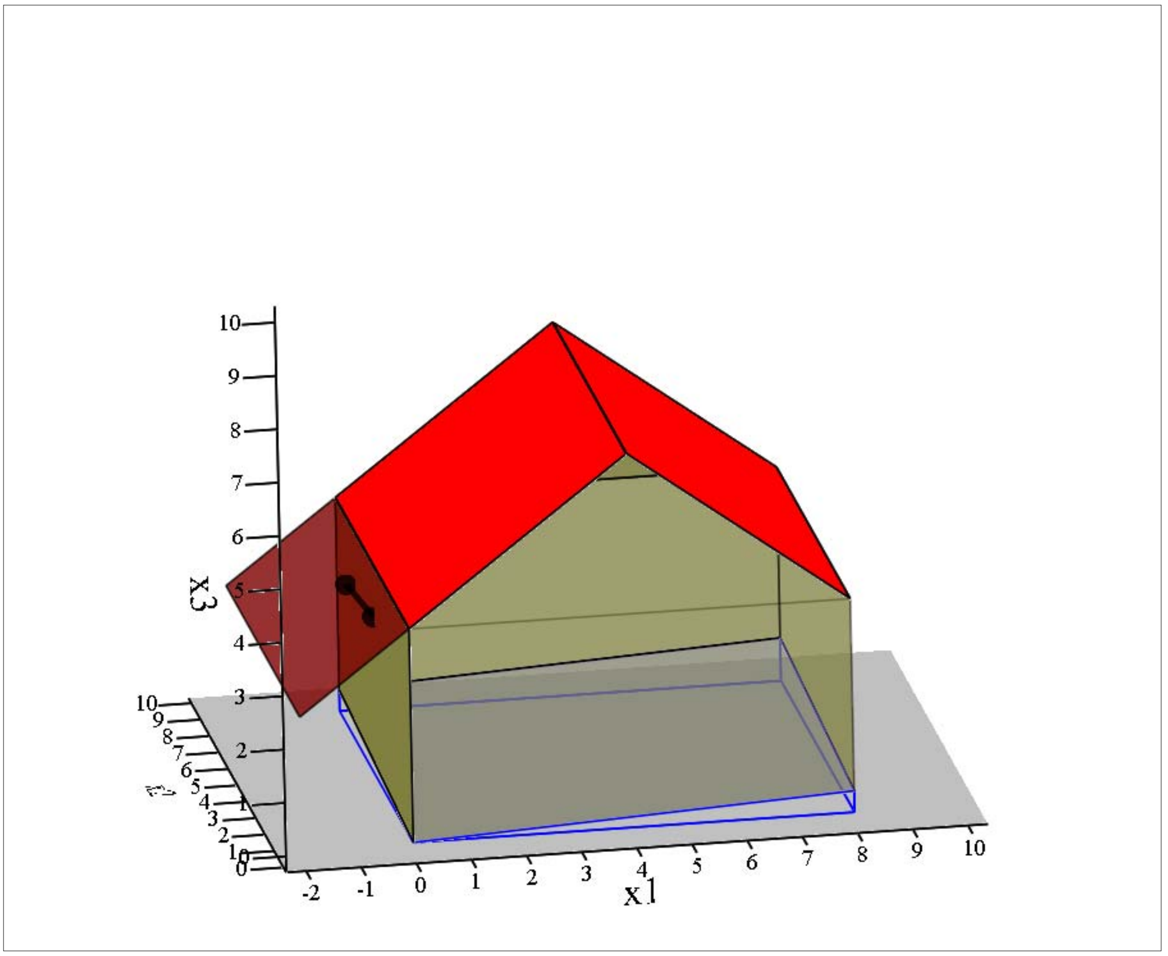
Ortsvektor Lotfußpunkt: $OL := x_l(\sigma_E) = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 4 \\ \frac{91}{25} \end{pmatrix}$

Lotfußpunkt: $L := OL^T \qquad L = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} & 4 & \frac{91}{25} \end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $OD := OL - OP = \begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ 0 \\ \frac{16}{25} \end{pmatrix}$

Länge des Stützbalkens: $d := |OL - OP| \qquad d = \frac{4}{5} = 0.8$

Darstellung



Planfigur