Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2010

• Mathematik 13 Technik - B II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Auf dem Nürnberger Flughafen werden die zu tranportierenden Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eines dieser Gepäckstücke den Zielfluhafen Palma de Mallorca hat, sei p.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)
Die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken höchstens eines den Zielflughafen Palma hat, sei 87,75%. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit p.

X: Anzahl der Gepäckstücke, die Palma erreichen, unter zwei untersuchten Gepäckstücken.

$$P(X \le 1) = 0.8775 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 2) = 0.8775 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 2) = 0.1225$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{2}{2} \cdot p^2 \cdot (1 - p)^0 = 0.1225 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 = 0.1225 \text{ auflösen}, p \rightarrow \begin{pmatrix} -0.35 \\ 0.35 \end{pmatrix}$$

Lösung: $p = 0.35$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Nun werden 15 aufeinanderfolgende Gepäckstücke betrachtet. Bestimmen Sie für $p = 0.35$ die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: *Genau fünf Gepäckstücke haben Palma als Ziel.*
B: *Das fünfzehnte Gepäckstück ist das fünfte nach Palma.*
C: *Genau fünf Gepäckstücke haben das Ziel Palma und liegen direkt hintereinender.*

$n := 15$ TW Seite 21

$$P(A) = P(X = 5) = B(15, 0.35, 5) = 0.21234$$

$$P(B) = B(14, 0.35, 4) \cdot 0.35 = \binom{14}{4} \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^{10} = 1001 \cdot 0.35^4 \cdot 0.65^{10} \cdot 0.35 = 0.07078$$

x, x, x, x, x, o, o, o, o, o, o, o, o, o, o

o, x, x, x, x, x, o, o, o, o, o, o, o, o, o   11 Möglichkeiten

. . .

o, o, o, o, o, o, o, o, o, o, x, x, x, x, x

$$P(C) = 11 \cdot 0.35^5 \cdot 0.65^{10} = 0.00078$$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Es werden 2% der Gepäckstücke fehlgeleitet; von den fehlgeleiteten haben 15% das Ziel Palma. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein Gepäckstück, welches das Ziel Palma hat, richtig weitergeleitet? Verwenden Sie $p = 0.35$.

Gegeben:

P: Gepäckstück mit Zielflughafen Palma. $P(P) = p = 0.35$

F: Gepäckstück fehlgeleitet. $P(F) = 0.02$

Fehlegeleitete mit Ziel Palma. $P_F(P) = 0.15$

Gesucht: $P_P(\overline{F})$

Lösung: $P_F(P) = \dfrac{P(F \cap P)}{P(F)} \Rightarrow P(F \cap P) = P_F(P) \cdot P(F) = 0.15 \cdot 0.02 = 0.003$

	P	$\overline{P}$	
F	0.003	0.017	0.02
$\overline{F}$	0.347	0.633	0.08
	0.35	0.65	1

$$P_P(\overline{F}) = \frac{P(\overline{F} \cap P)}{P(P)} = \frac{0.347}{0.35} = 0.991$$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Für das Sortieren des Gepäcks auf der Basis von Mikrochips wird einer Fluggesellschaft ein Lesegerät angeboten, das eine Quote von weniger als 1% an Lesefehlern verspricht. Die Fluggesellschaft testet ihre Vermutung, dass die Fehlerquote beim Lesen mindestens 1% beträgt, an 4000 mit Mikrochips gekennzeichneten Gepäckstücken auf dem 5%-Signifikanzniveau.
Bestimmen Sie den Ablehnungs- und Annahmebereich der Nullhypothese.

Testgröße: X: Anzahl der Lesefehler unter $n := 4000$ Gepäckstücken $p := 0.01$

Nullhypothese H_0: $p_0 \ge p \rightarrow p_0 \ge 0.01$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.01$

Annahmebereich: $A = \{ k+1, k+2, \ldots, 500 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, 2, \ldots, k \}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 40$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 6.293$

$P(\overline{A}) \leq 0.05 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(X \leq k) \leq 0.05$

$\Leftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05 \qquad \Leftrightarrow$

TW $\qquad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.645 \qquad k \leq -1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ **Gleitkommazahl, 5** $\rightarrow k \leq 29.148$

$k_0 := 29.148$ abrunden: $k := \text{floor}(k_0) = 29$

$\overline{A} = \{ 0, 1, 2, \ldots, 29 \} \qquad A = \{ 30, 31, \ldots, 4000 \}$

Teilaufgabe 2 (6 BE)
Ein bestimmtes Modell eines MP3-Players hat einen Herstellungspreis von 55 €. Erfahrungsgemäß werden während der Garantiezeit 20% dieser MP3-Player reklamiert.
25% der reklamierten Player weisen einen geringen Schaden auf, dessen Reparatur durchschnittlich 9 € Kosten verursacht, bei 60% muss die Elektronik ausgetauscht werden, wofür 25 € Kosten anfallen. Die restlichen defekten MP3-Player werden einbehalten und vollständig durch neue ersetzt.
Aus den einbehaltenen MP3-Playern gewinnt der Hersteller noch Ersatzteile im Wert von 10 €.
Berechnen Sie, zu welchem Preis ein MP3-Player an den Großhändler verkauft werden muss, damit die Firma einen durchschnittlichen Gewinn von 13 € erzielt.

R: Ein zufällig ausgewählter MP3-Player wird reklamiert.

G: Ein zufällig ausgewählter MP3-Player hat einen geringen Schaden.

E: Ein zufällig ausgewählter MP3-Player hat eine defekte Elektronik.

N: Ein zufällig ausgewählter MP3-Player wird durch einen neuen ersetzt.

Gegeben: $\quad P(R) = 0.20 \qquad P_R(G) = 0.25 \qquad P_R(E) = 0.60$

Restliche defekte MP3-Player: $\quad P_R(N) = 1 - (0.25 + 0.60) = 0.15$

K: Kosten

$P(K = 55) = 0.80$

$P(K = 55 + 9 = 64) = P(R \cap G) = P_R(G) \cdot P(R) = 0.25 \cdot 0.20 = 0.05$

$P(K = 55 + 25 = 80) = P(R \cap E) = P_R(E) \cdot P(R) = 0.60 \cdot 0.20 = 0.12$

$P(K = 2 \cdot 55 - 10 = 100) = P(R \cap N) = P_R(N) \cdot P(R) = 0.15 \cdot 0.20 = 0.03$

Erwartungswert: $\quad \mu := 55 \cdot 0.8 + 64 \cdot 0.05 + 80 \cdot 0.12 + 100 \cdot 0.03 \qquad \mu = 59.8$

Duchschnittlicher verkaufspreis pro Player: $\quad 59.80 \cdot € + 13 \cdot € = 72.80 \cdot €$

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Eine Zeitschrift behauptet, dass 30% der Jugendlichen unter 18 Jahren einen MP3-Player besitzen. Eine Gruppe von Schülern zweifelt an dieser Aussage, wobei einige behaupten, dass der Anteil kleiner ist, andere diesen Anteil für höher einschätzen. In einer Umfrage werden 240 zufällig ausgewählte Jugendliche unter 18 Jahren befragt.
Legen Sie für einen zweiseitigen Signifikanztest mit einem Signifikanzniveau von 5% die Testgröße fest, formulieren Sie die Hypothesen und bestimmen Sie Annahme- und Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße X: Anzahl der Jungendlichen mit MP3-Player unter $n := 240$

$p := 0.3$

Nullhypothese H_0: $p = 0.3$ Gegenhypothese H_1: $p \neq 0.3$

Testart: Zweiseitiger Signifikanztest

Annahmebereich: $A = \{ k_1 + 1, k_1 + 2, ..., k_2 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., k_1 \} \cup \{ k_2 + 1, k_2 + 2, ..., 500 \}$

$P(\overline{A}) \leq 0.05$ $\mu := n \cdot p = 72$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 7.099$ >3, Näherung durch NV möglich

$P(X \leq k_1) \leq 0.025$ $\Phi\left(\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \leq 0.025$

TW $\frac{k_1 - \mu + 0.5}{\sigma} \leq -1.960$ auflösen, $k_1 \rightarrow -\infty < k_1 \leq 57.58538035014970258$

abrunden: $k_1 := 57$

Berechnung von k_2:

Abweichung vom Erwartungswert: $c := \mu - (k_1 + 1) = 14$

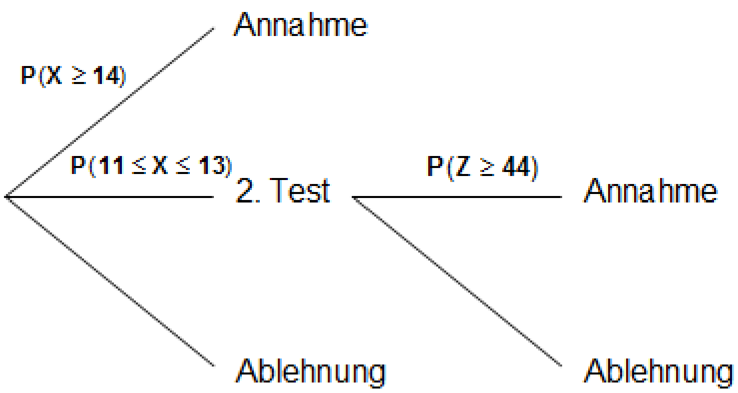
Obere Grenze: $k_2 := \mu + c = 86$

$A = \{ 58, 59, ..., 86 \}$ $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., 57 \} \cup \{ 87, 88, ..., 240 \}$

Teilaufgabe 4 (8 BE)
Es wird behauptet, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 0,15 ein Jugendlicher mindestens zwei MP3-Player besitzt. Es werden zuerst 100 zufällig ausgewählte Jugendliche befragt. Liegt die Anzahl der Jugendlichen mit mindestens zwei MP3-Playern unter den 100 befragten mindestens bei 14, so wird die Behauptung angenommen. Liegt die Anzahl mindestens bei 11, aber höchstens bei 13, so wird eine zweite Umfrage bei 300 Jugenlichen durchgeführt. Berägt hier die Anzahl der Jugendlichen mit mindestens zwei MP3-Playern mindestens 44, so wird die Behauptung ebenfalls angenommen, sonst abgelehnt.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Behauptung bei dieser Vorgehensweise angenommen wird, wenn die Wahrscheinlichkeit 0,15 beträgt, dass ein Jugendlicher mindestens einen MP3-Player besitzt.

Zufallsgröße X: Anzahl der Jugendlichen, die mindestens zwei MP3-Player beeitzen unter $n := 100$ befragten Jugendlichen.
X ist binomialverteilt nach $B(100, 0.15, k)$

Zufallsgröße Z: Anzahl der Jugendlichen, die mindestens zwei MP3-Player beeitzen unter $n := 300$ befragten Jugendlichen.
Z ist binomialverteilt nach $B(300, 0.15, k)$



$$P(\text{Annahme}) = P(X \geq 14) + P(11 \leq X \leq 13) \cdot P(Z \geq 44)$$

$$= (1 - P(X \leq 13)) + P(11 \leq X \leq 13) \cdot (1 - P(Z \leq 43))$$

$$= (1 - B(100, 0.15, 13)) + (B(100, 0.15, 13) - B(100, 0.15, 10)) \cdot (1 - B(300, 0.15, 43))$$

$$\mu := 300 \cdot 0.15 = 45$$

$$\sigma := \sqrt{300 \cdot 0.15 \cdot 0.85} = 6.185$$

$$= (1 - 0.34743) + (0.34743 - 0.09945) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{43 - 45 + 0.5}{6.185}\right)\right)$$

$$= (1 - 0.34743) + (0.34743 - 0.09945) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{43 - 45 + 0.5}{6.185}\right)\right)$$

$= 0.65257 + 0.24798 \cdot (1 - \Phi(-0.243))$

$= 0.65257 + 0.24798 \cdot (1 - 1 + \Phi(0.243))$

$= 0.65257 + 0.24798 \cdot 0.59483 = 0.80008$