Abiturprüfung Mathematik 13 Technik

• Differentialgleichungen in Anwendungen - Lösung

made with mathcad

Aufgabe 1: Abi 1999 / AI

Ein erhitzter Körper kühlt sich im Laufe der Zeit allmählich auf die konstante Temperatur a (in °C) seiner Umgebung ab. Seine Temperatur y (in °C) wird zu jedem Zeitpunkt t (in Sekunden) durch y(t) beschrieben.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Abkühlungskurve y(t), wenn für den Abkühlungsvorgang folgende Differentialgleichung gilt:

$$y'(t) = -b^2 \cdot (y - a)$$

($y'(t) = \dfrac{dy}{dx}$ ist die Ableitung von y(t) nach der Zeit, der zeitlich konstante Faktor b^2 beschreibt die physikalisch Beschaffenheit des Körpers.)

b) Der Körper hat zum Zeitpunkt t = 0 eine Temperatur von 40 (°C), wobei die Umgebungstemperatur 21 (°C) beträgt.

Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem der Körper auf 35 (°C) abgekühlt ist, für $b^2 = 6.0 \cdot 10^{-3}$ (in s^{-1}).

Teilaufgabe a)

$$y' = -b^2 \cdot (y - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dt} = -b^2 \cdot (y - a) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y - a} = -b^2 \cdot dx$$

Integration: $$\int \frac{1}{y - a}\, dy = \int -b^2\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|y - a|) = -b^2 \cdot t + k$$

Auflösen nach y:

Da $y - a > 0$: $$y - a = e^{-b^2 \cdot t + k}$$

$$\Leftrightarrow \quad y = a + K \cdot e^{-b^2 \cdot t} \qquad \text{mit } e^k = K\text{, also } K > 0$$

Teilaufgabe b)

Gegeben: Umgebungstemperatur: $a = 21$ Anfangswert: $t_0 = 0$ $y_0 = 40$

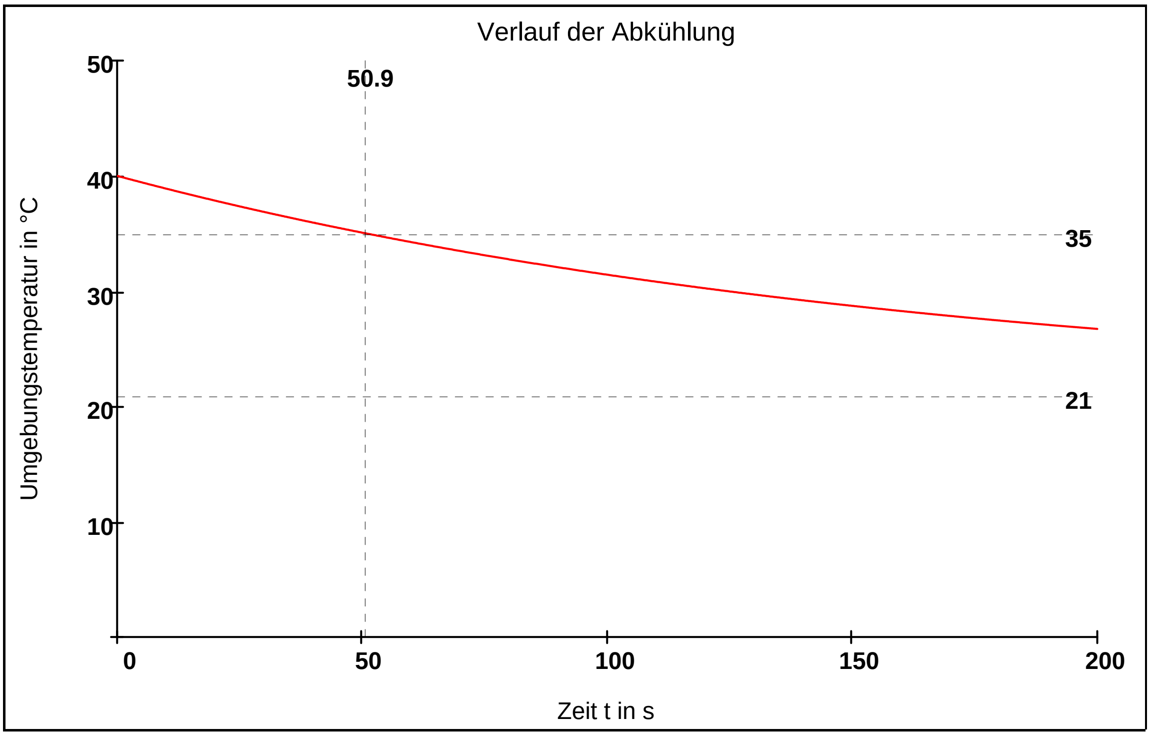
$$y(t, K) := 21 + K \cdot e^{-\left(6.0 \cdot 10^{-3}\right) \cdot t}$$

$$y(0, K) = 40 \rightarrow K + 21 = 40 \text{ auflösen}, K \rightarrow 19 \quad \Rightarrow \quad K = 19$$

Partikuläre Lösung: $y(t, 19) = 19 \cdot e^{-0.006 \cdot t} + 21$

$$y(t_0, 19) = 35 \rightarrow 19 \cdot e^{-0.006 \cdot t_0} + 21 = 35 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t_0 \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 50.9$$

Nach 51 Sekunden beträgt die Temperatur des Körpers nur noch 35°C.



Aufgabe 2: Abi 2000 / AI

Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt t = 0 wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit v(t) der Kugel zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$ gilt folgende Differentialgleichung: $k \cdot v' + v = g \cdot b$.
Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und k, b > 0 Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

a) Bestimmen Sie v(t) mit der Methode der Variation der Konstanten.

[Ergebnis: $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{k}}\right)$]

b) Ermitteln Sie das Verhalten von v(t) für $x \rightarrow \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Teilaufgabe a)

Gegeben ist die DGL: $k \cdot v' + v = g \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{v}{k} = \frac{g \cdot b}{k}$

Homogene DGL: $v' + \frac{v}{k} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v' = - -\frac{v}{k}$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} = -\frac{v}{k}$

Trennen der Variablen: $\frac{dv}{v} = \frac{-1}{k} \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{v}\, dv = \int \frac{-1}{k}\, dt + C \rightarrow \ln(v) = C - \frac{t}{k}$

Auflösen nach v: $\ln(v) = C - \frac{t}{k} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, v \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow e^{C} \cdot e^{-\frac{t}{k}}$ mit $e^{C} = D$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $v_H(t) = D \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Variation der Konstanten: $v_S(t) = D(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Ableitung: $v'_S(t) = D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + D(t) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot e^{-\frac{t}{k}}$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $v' + \frac{v}{k} = \frac{g \cdot b}{k}$

$$D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + D(t) \cdot \left(-\frac{1}{k}\right) \cdot e^{-\frac{t}{k}} + \frac{1}{k} \cdot \left(D(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}}\right) = \frac{g \cdot b}{k}$$

Vereinfachen: $D'(t) \cdot e^{-\frac{t}{k}} = \frac{g \cdot b}{k} \quad \Leftrightarrow \quad D'(t) = \frac{g \cdot b}{k} \cdot e^{\frac{t}{k}}$

Integration: $D(t) = \int \frac{g \cdot b}{k} \cdot e^{\frac{t}{k}} \, dt = \frac{g \cdot b}{k} \cdot k \cdot e^{\frac{t}{k}} = g \cdot b \cdot e^{\frac{t}{k}}$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $v_S(t) = g \cdot b \cdot e^{\frac{t}{k}} \cdot e^{-\frac{t}{k}} = g \cdot b$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $v_A(t) = D \cdot e^{-\frac{t}{k}} + g \cdot b$

Anfangsbedingung einsetzen: $v_A(0) = 0$

$\Leftrightarrow \quad D \cdot e^0 + g \cdot b = 0$ auflösen, $D \rightarrow -b \cdot g$

Partikuläre Lösung: $v_P(t) = -b \cdot g \cdot e^{-\frac{t}{k}} + g \cdot b \qquad \boxed{v_P(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)}$

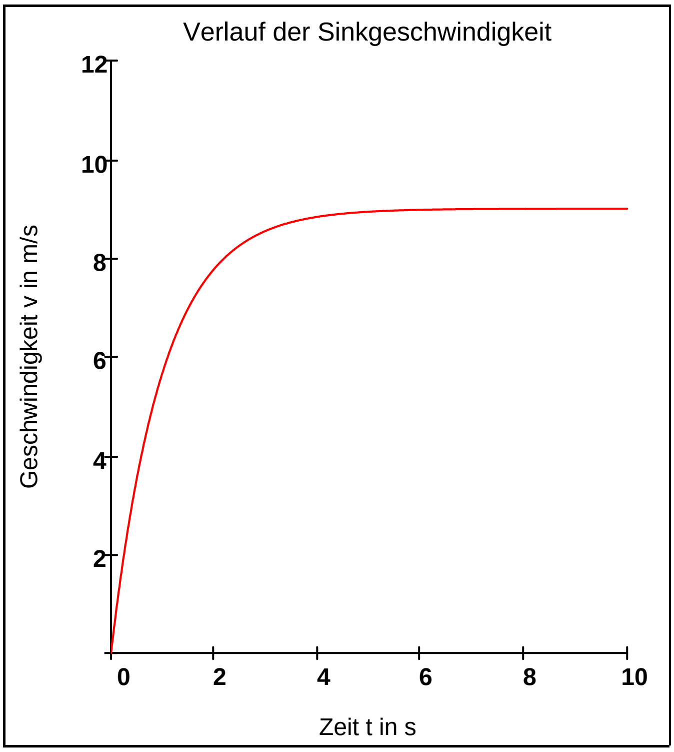
Teilaufgabe b)

$$\lim_{t \to \infty} \left[g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)\right] = g \cdot b$$

Die Geschwindigkeit der Kugel wird nicht beliebig größer, sie strebt gegen den Wert $g \cdot b$

Angenommene Werte für die graphische Darstellung: $g := 10$ $b := \frac{9}{10}$ $k := 1$

$$v_P(t) := g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$$



Aufgabe 3: Abi 2002 / AI

Zum Zeitpunkt t = 0 besitzen 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys.
Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm f(t) beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

a) Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t für $t \geq 0$ die Differentialgleichung:

$f'(t) = 0.2 \cdot \left(60 \cdot 10^6 - f(t)\right)$, wobei $f'(t)$ die Ableitung von f(t) nach der Zeit ist.
Leiten Sie aus dieser Differentialgleichung den Funktionsterm f(t) her.

b) Nun soll gelten: $f(t) = 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0.2 \cdot t}$
Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat.
Berechnen Sie den Zeitpunkt t, $t \geq 0$, an dem 60% der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

Teilaufgabe a)

Gegebene DGL: $f'(t) = 0.2 \cdot \left(60 \cdot 10^6 - f(t)\right)$

Triviale Lösung: $60 \cdot 10^6 - f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(t) = 60 \cdot 10^6$

Differentialquotient: $\dfrac{df}{dt} = 0.2 \cdot \left(60 \cdot 10^6 - f(t)\right)$

Trennen der Variablen: $\dfrac{df}{60 \cdot 10^6 - f} = 0.2 \cdot dt \qquad$ mit $f(t) \neq 60 \cdot 10^6$

Integration: $$\int \frac{1}{\left(60 \cdot 10^6 - f\right)} \, df = \int 0.2 \, dt + k$$

$$-\ln\left(\left|60 \cdot 10^6 - f\right|\right) = 0.2 \cdot t + k$$

Delogarithmieren: $\left|60 \cdot 10^6 - f\right| = e^{-0.2 \cdot t + k}$

$60 \cdot 10^6 - f > 0 \qquad 60 \cdot 10^6 - f = e^{-0.2 \cdot t + k} \quad \Rightarrow \quad f(t) = 60 \cdot 10^6 - K \cdot e^{-0.2 \cdot t}$

$K \in \mathbb{R}$ (mit trivialer Lösung)

$f(0) = 10 \cdot 10^6 \qquad 60 \cdot 10^6 - K \cdot e^{-0.2 \cdot 0} = 10 \cdot 10^6$ auflösen, $K \rightarrow 50000000$

$$f(t) := 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{-2}{10} \cdot t}$$

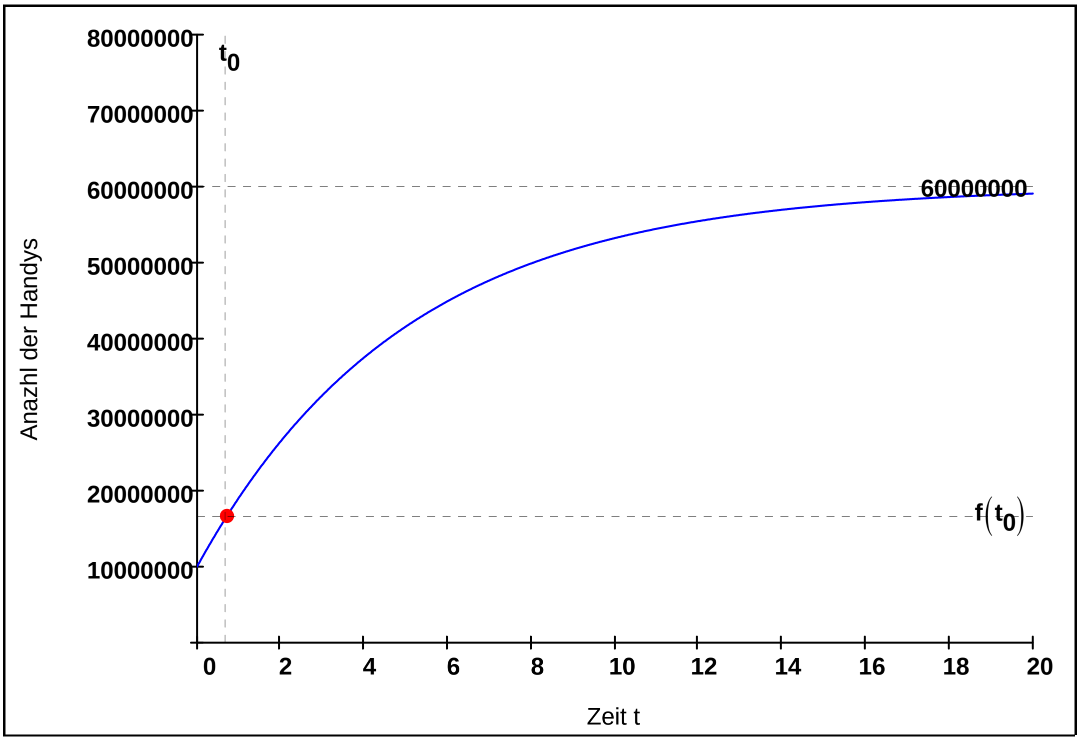
Teilaufgabe b)

$$\lim_{t \to \infty} \left(60 \cdot 10^6 - K \cdot e^{-\frac{2}{10} \cdot t} \right) \to 60000000$$

Das heißt, bei ca 60 Millionen Handys ist der Markt gesättigt.

$$t_0 := f(0) = \frac{6}{10} \cdot f(t_0) \to 10000000 = 36000000 - 30000000 \cdot e^{-\frac{t_0}{5}} \to 5 \cdot \ln(15) - 5 \cdot \ln(13)$$

$$t_0 = 5 \cdot \ln(15) - 5 \cdot \ln(13) = 0.7$$



Aufgabe 4: Abi 2002 / AII

Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration y(t) mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt. Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter. Gleichzeitig fließt die selbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration y(t) der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differentialgleichung:

$y'(t) = \frac{Q}{V}\cdot k_0 - \frac{Q}{V}\cdot y(t)$ mit Q, k_0 und V konstant, $t \geq 0$.

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C, wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Behälter eine Kupfersulfatlösung mit der Konzentration $30\cdot\frac{g}{l}$ befindet und $k_0 = 24\cdot\frac{g}{l}$ ist.

[Teilergebnis: $y(t) = C\cdot e^{-\frac{Q}{V}\cdot t} + k_0$]

Gegeben ist die DGL: $y' + q\cdot y = q\cdot k_0$ mit $q = \frac{Q}{V}$

Homogene DGL: $y' + q\cdot y = 0$

Triviale Lösung: $y = 0$

Differentialquotient: $\frac{dy}{dt} = -q\cdot y$

Trennen der Variablen: $\frac{dy}{y} = -q\cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{y}\,dy = \int -q\,dt \quad\Leftrightarrow\quad \ln(|y|) = -q\cdot t + c$

Delogarithmieren: $|y| = e^{-q\cdot t + c}$

$y > 0 \quad\Rightarrow\quad y_H = D\cdot e^{-q\cdot t}$ mit K $\in$ IR (mit trivialer Lösung)

Variation der Konstanten: $y_S = D(t)\cdot e^{-q\cdot t}$ $\quad y'_S = D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} + D(t)\cdot(-q)\cdot e^{-q\cdot t}$

Einsetzen in inhomogene DGL: $y' + q\cdot y = q\cdot k_0$

$D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} + D(t)\cdot(-q)\cdot e^{-q\cdot t} + q\cdot\left(D(t)\cdot e^{-q\cdot t}\right) = q\cdot k_0$ erweitern $\rightarrow D'(t)\cdot e^{-q\cdot t} = k_0\cdot q$

$D'(t) = k_0 \cdot q \cdot e^{q \cdot t}$ Integration: $D(t) = \int k_0 \cdot q \cdot e^{q \cdot t}\,dt \rightarrow D(t) = k_0 \cdot e^{q \cdot t}$

$\Rightarrow \quad y_S = k_0 \cdot e^{q \cdot t} \cdot e^{-q \cdot t} = k_0$

Allgemeine Lösung: $y_A(t) = D \cdot e^{-q \cdot t} + k_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_A(t) = D \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + k_0$

$y_A(0) = 30 \cdot \frac{g}{l} \quad \Leftrightarrow \quad D \cdot e^0 + 24 \cdot \frac{g}{l} = 30 \cdot \frac{g}{l} \quad \Leftrightarrow \quad D = 6 \cdot \frac{g}{l}$

Konkreter Funktionsterm: $\boxed{y_A(t) = 6 \cdot \frac{g}{l} \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + 24 \cdot \frac{g}{l}}$

Aufgabe 5: Abi 2003 / AI

Die chemische Verbindung Mixoflux zerfällt beim Erhitzen je nach Masse der Probe innerhalb einiger Minuten. Bei einem Versuch beträgt die Anfangsmasse der Probe an Mixoflux 1,00 g. x sei die in der Zeit t (gemessen in Minuten) zerfallene Masse.
Die zugehörige Differentialgleichung ist: $2 \cdot x' = (1 + x) \cdot (1 - x)$ mit $x \in [\, 0 \,;\, 1 \,[$.

Dabei ist $x' = \frac{dx}{dt}$ die Ableitung der Funktion x nach der Variablen t.

a) Bestimmen Sie für die Funktion x einen Funktionsterm x(t).
Auf die Verwendung von Einheiten wird während der Rechnung verzichtet.

b) Für einen *vollständigen Zerfall* genügt es im Allgemeinen, wenn 99,9% der Anfangsmenge zerfallen ist. Nach welcher Zeit tritt dieses Ereignis ein?

Teilaufgabe a)

Gegeben ist die DGL: $2 \cdot x'(t) = \left(1 - x(t)^2\right)$ mit $q = \frac{Q}{V}$

Differentialquotient: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (1 + x) \cdot (1 - x)$

Trennen der Variablen: $\frac{2 \cdot dx}{(1 + x) \cdot (1 - x)} = dt$ mit $x \in [\, 0 \,;\, 1 \,[$

Integration: $\int \frac{2}{(1 + x) \cdot (1 - x)} \, dx = \int 1 \, dt$

Patialbruchzerlegung:

$$\frac{2}{(1 + x) \cdot (1 - x)} = \frac{A}{1 + x} + \frac{B}{1 - x} = \frac{A \cdot (1 - x) + B \cdot (1 + x)}{(1 + x) \cdot (1 - x)} = \frac{(A + B) + (-A + B) \cdot x}{(1 + x) \cdot (1 - x)}$$

Koeffizientenvergleich:

$A + B = 2$

$-A + B = 0 \qquad A = B \qquad 2 \cdot B = 2 \qquad \Rightarrow \qquad B = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$

$$\Rightarrow \qquad \int \left(\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \int 1 \, dt$$

$$\ln(|1 + x|) - \ln(|1 - x|) = t + c$$

mit $x \in [\,0\,;1\,[$ $\Rightarrow$ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = t + c$

Delogarithmieren: $\frac{1+x}{1-x} = e^{t+c}$

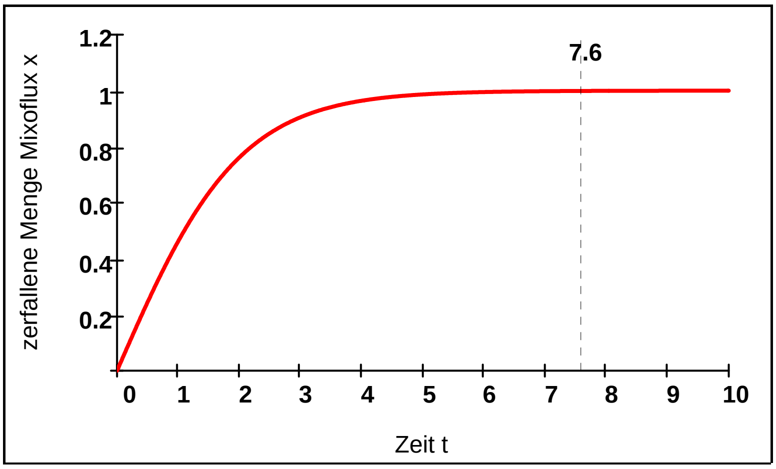
Auflösen nach x: $1 + x = (1-x)\cdot e^{t+c}$ $\Leftrightarrow$ $\left(1+e^{t+c}\right)\cdot x = e^{t+c} - 1$

Allgemeine Lösung: $x_A(t) = \frac{e^{t+c}-1}{e^{t+c}+1}$

Anfangsbedingung: $x_A(0) = 0$ (Noch kein Mixoflux zerfallen.)

$\frac{e^c - 1}{e^c + 1} = 0$ $\Rightarrow$ $e^C - 1 = 0$ $\Rightarrow$ $C = 0$

Spezielle Lösung: $x_P(t) := \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$



Teilaufgabe b) $x_P(t_0) = 0.999$ $\quad \frac{e^{t_0}-1}{e^{t_0}+1} = 0.999$ $\Leftrightarrow$ $e^{t_0} - 1 = 0.999\cdot\left(e^{t_0}+1\right)$

$\Leftrightarrow$ $(1-0.999)\cdot e^{t_0} = 1.999$ $\Leftrightarrow$ $e^{t_0} = \frac{1.999}{0.001}$

Auflösen: $t_0 := \ln(1999)$ $\quad t_0 = 7.6$

Aufgabe 6: Abi 2004 / AII

Schließt man an eine reale Spule zum Zeitpunkt t = 0 an eine Gleichspannung mit U = U_0 an, dann gilt für die Stromstärke J(t) die Differentialgleichung $U_0 - L \cdot J'(t) - R \cdot J(t) = 0$, wobe U_0, R und L konstante Größen sind und $J'(t)$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist.
Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differentialgleichung für die Stromstärke $J(t)$ für die Anfangsbedingung $J(0) = 0$.

Gegeben ist die konkrete DGL: $U_0 - L \cdot J' - R \cdot J = 0$

Umformung: $J' + \frac{R}{L} \cdot J = \frac{U_0}{L}$

Lösung über die Variation der Konsntanten:

Homogene DGL: $J' + \frac{R}{L} \cdot J = 0$ Triviale Lösung: $J = 0$

Differentialquotient: $\frac{dJ}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot J$

Trennen der Variablen: $\frac{dJ}{J} = -\frac{R}{L} \cdot dt$ mit $J \neq 0$

Integration: $\int \frac{1}{J} \, dJ = \int -\frac{R}{L} \, dt + c \rightarrow \ln(J) = c - \frac{R \cdot t}{L}$

kein Betrag, da $J > 0$

Delogarithmieren: $J = e^{-\frac{R}{L} \cdot t + c} = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

Variation der Konstanten: $J = C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$

$$J' = C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $\boxed{J' + \frac{R}{L} \cdot J = \frac{U_0}{L}}$

$$C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot \left(C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = \frac{U_0}{L} \text{ vereinfachen } \rightarrow C'(t) \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{L}} = \frac{U_0}{L}$$

Auflösen nach C'(t): $C'(t) \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{L}} = \frac{U_0}{L} \text{ auflösen}, C'(t) \rightarrow \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L}$

$$C'(t) = \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L}$$

Integrieren: $C(t) = \int \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L} \, dt \rightarrow C(t) = \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{R}$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$J(t) = \left(\frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

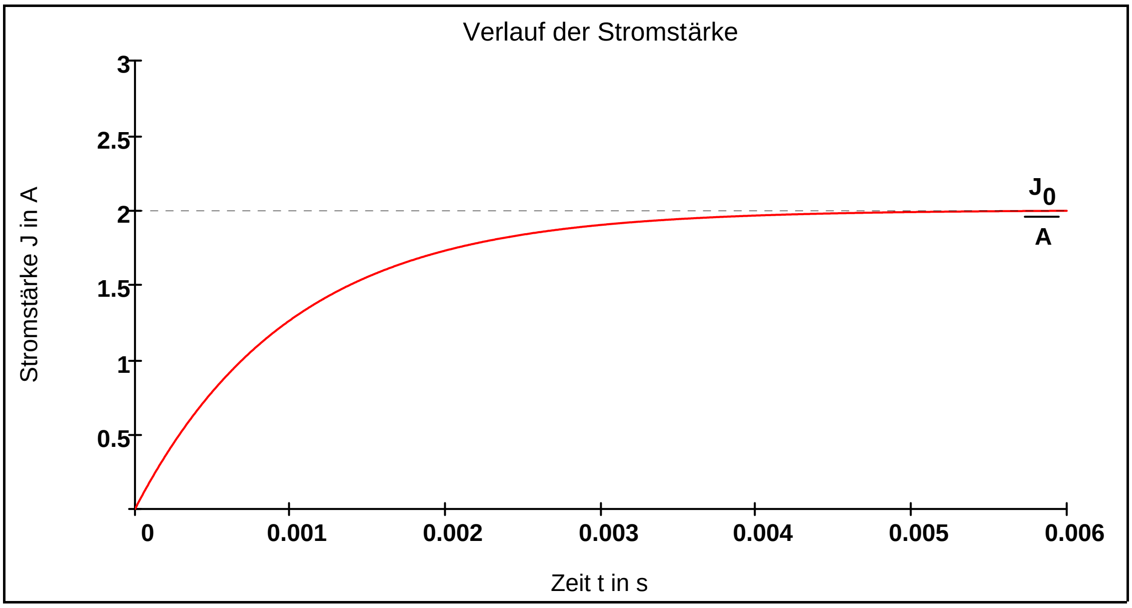
$$J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

Anfangsbedingung: $J(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \cdot e^0 + \frac{U_0}{R} = 0 \text{ auflösen}, C \rightarrow -\frac{U_0}{R}$

Partikuläre Lösung: $\boxed{J(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)}$

Konkretes Zahlenbeispiel: $L := 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V \cdot s}{A}$ $R := 15 \cdot \frac{V}{A}$ $U_0 := 30 \cdot V$

$$J(t) := \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = -2 \cdot A \cdot \left(e^{-\frac{1000 \cdot t}{s}} - 1\right)$$ $J_0 := 2 \cdot A$



Aufgabe 7: Abi 2005 / AI

Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differentialgleichung:
$N'(t) = 0.1 \cdot N(t) \cdot (5 - N(t))$.
N(t) umfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t \geq 0$.
Dabei gilt: $0 < N(0) < 4.5$.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}$]

b) Berechnen Sie allgemein, auf welchen Endwert die Anzahl der Exemplare dieser Pflanzenart auf lange Sicht anwachsen wird und zu welchem Zeitpunkt t_1 90% des Endwertes ereicht werden.
Beschreiben Sie den Einfluss des Anfangswertes N_0 auf diesen Endwert.

Gegebene DGL: $N' = 0.1 \cdot N \cdot (5 - N)$

Differentialquotient: $\dfrac{dN}{dt} = 0.1 \cdot N \cdot (5 - N)$

Trennen der Variablen: $\dfrac{dN}{N \cdot (5 - N)} = 0.1$

Integration: $\displaystyle\int \frac{1}{N \cdot (5 - N)}\, dN = \int 0.1\, dt$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{N \cdot (5 - N)} = \dfrac{A}{N} + \dfrac{B}{5 - N} = \dfrac{A \cdot (5 - N) + B \cdot N}{N \cdot (5 - N)} = \dfrac{5 \cdot A + (B - A) \cdot N}{N \cdot (5 - N)}$

Koeffizientenvergleich: $5 \cdot A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{5}$

$B - A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = A = \dfrac{1}{5}$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{5}}{N} + \frac{\frac{1}{5}}{5 - N} \right) dN = \int 0.1\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{5 - N} \right) dN = \int 0.5\, dt$$

Integration: $\ln(|N|) - \ln(|5 - N|) = 0.5 \cdot t + k$

Betrag weglassen, da $0 < N < 4.5$

Logarithmus zusammenfassen: $\ln\left(\frac{N}{5-N}\right) = 0.5\cdot t + k$

Delogarithmieren $\frac{N}{5-N} = e^{0.5\cdot t+k}$

Nach N auflösen:

$\Leftrightarrow \quad N = 5\cdot e^{0.5\cdot t+k} - N\cdot e^{0.5\cdot t+k} \quad \Leftrightarrow \quad N\left(1 + e^{0.5\cdot t+k}\right) = 5\cdot e^{0.5\cdot t+k}$

$\Leftrightarrow \quad N(t) = \frac{5\cdot e^{0.5\cdot t+k}}{1 + e^{0.5\cdot t+k}} = \frac{5\cdot K\cdot e^{0.5\cdot t}}{K\cdot e^{0.5\cdot t} + 1}$ mit $K = e^k$

Anfangsbedingung einsetzen $N(0) = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5\cdot K\cdot e^0}{K\cdot e^0 + 1} = N_0$

Nach K auflösen: $5K = N_0\cdot(K+1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(5 - N_0\right)\cdot K = N_0$

$\Leftrightarrow \quad K = \frac{N_0}{5 - N_0}$

In Lösung einsetzen: $N(t) = \frac{5\cdot\frac{N_0}{5-N_0}\cdot e^{0.5\cdot t}}{\frac{N_0}{5-N_0}\cdot e^{0.5\cdot t} + 1}$

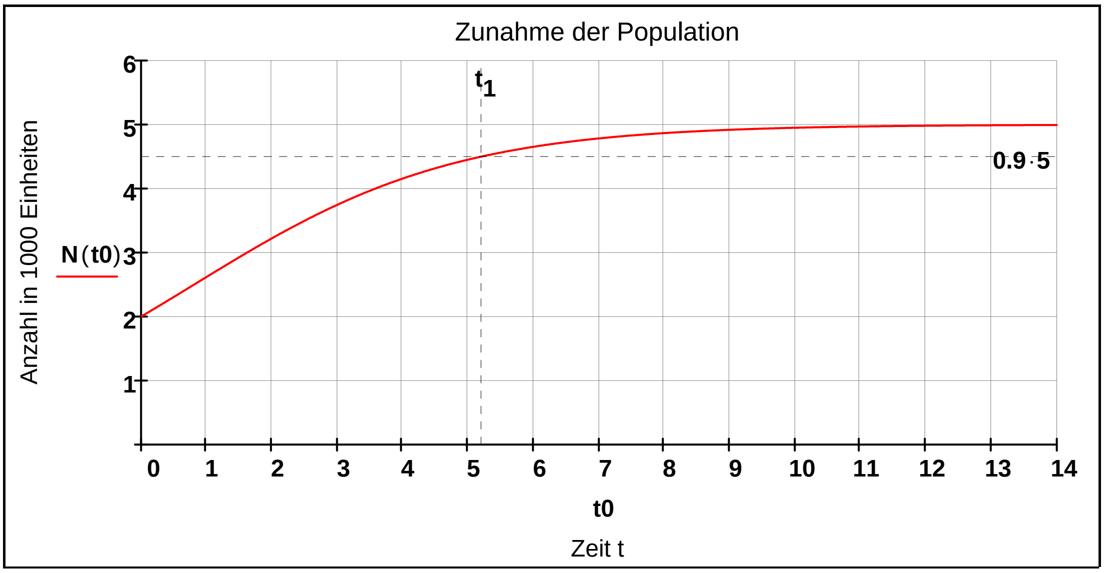
Vereinfachen. $N(t) = \frac{5\cdot\frac{N_0}{5-N_0}\cdot e^{0.5\cdot t}}{\frac{N_0}{5-N_0}\cdot e^{0.5\cdot t} + 1}\cdot\frac{5-N_0}{5-N_0} = \frac{5\cdot N_0\cdot e^{0.5\cdot t}}{N_0\cdot e^{0.5\cdot t} + 5 - N_0}$

Endgültige Lösung: $N(t) = \frac{5\cdot N_0\cdot e^{0.5\cdot t}}{N_0\cdot e^{0.5\cdot t} + 5 - N_0}$

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.

Anfangswert $N_0 = 2$ mal 1000

$$N(t) := \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0} \qquad t_1 := 2 \cdot \ln\left(\frac{45 - 9 \cdot N_0}{N_0}\right) \qquad t_1 = 5.205$$



Teilaufgabe b)

$$\infty$$
$$\uparrow$$

$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0}\right) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\frac{5}{2} \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{\frac{N_0}{2} \cdot e^{0.5 \cdot t}}\right) = \lim_{t \to \infty} (5) = 5$$

$$\downarrow$$
$$\infty$$

Der Endwert nach langer Zeit sind 5000 Individuen, unabhängig von der Anzahl der Individuen N_0.

$$0.9 \cdot 5 = \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t_1}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t_1} + 5 - N_0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(4.5\cdot N_0 - 5\cdot N_0\right)\cdot e^{0.5\cdot t_1} = 4.5\cdot\left(N_0 - 5\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{0.5\cdot t_1} = \frac{4.5\cdot\left(N_0 - 5\right)}{(-0.5)\cdot N_0}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{0.5\cdot t_1} = \frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0} \quad \Leftrightarrow \quad 0.5\cdot t_1 = \ln\left(\frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0}\right)$$

$$t_1 := 2\cdot\ln\left(\frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0}\right) \qquad t_1 = 5.205$$

Aufgabe 8: Abi 2006 / AI

Die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers im freien Fall mit turbulenter Luftreibung kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden: $\frac{c^2}{g} \cdot v' = c^2 - v^2$.

Dabei ist g die konstante Fallbeschleunigung und c eine Konstante, die von der Masse und der Form der Körpers sowie von der Dichte der Luft abhängt, c und g sind positiv.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm v(t) für $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $v(0) = 0$.
Dabei darf vorausgesetzt werden, dass stets gilt: $0 \leq v < c$.

[Ergebnis: $v(t) = c \cdot \frac{e^{\frac{2 \cdot g}{c} \cdot t} - 1}{e^{\frac{2 \cdot g}{c} \cdot t} + 1}$]

b) Berechnen Sie $\lim_{t \to \infty} v(t)$ und schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung der Konstanten c.

Gegeben ist die DGL: $\frac{c^2}{g} \cdot v' = c^2 - v^2$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \cdot g$

Trennen der Variablen: $\frac{dv}{c^2 - v^2} = \frac{g}{c^2} \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{c^2 - v^2} \, dv = \int \frac{g}{c^2} \, dt$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{c^2 - v^2} = \frac{A}{c + v} + \frac{B}{c - v} = \frac{A \cdot (c - v) + B \cdot (c + v)}{(c + v) \cdot (c - v)} = \frac{(A + B) \cdot c + (B - A) \cdot v}{(c + v) \cdot (c - v)}$$

Koeffizientenvergleich: $(A + B) \cdot c = 1$

$B - A = 0 \quad \Rightarrow \quad A = B$

$\Rightarrow \quad 2 \cdot A \cdot c = 1$ auflösen, $A \rightarrow \frac{1}{2 \cdot c} \qquad A = \frac{1}{2 \cdot c} \qquad B = \frac{1}{2 \cdot c}$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{\frac{1}{2\cdot c}}{c+v} + \frac{\frac{1}{2\cdot c}}{c-v}\, dv = \int \frac{g}{c^2}\, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v}\, dv = \int \frac{2\cdot g}{c}\, dt + k \rightarrow \ln(c+v) - \ln(c-v) = \frac{c\cdot k + 2\cdot g\cdot t}{c}$$

$$\ln\left(\frac{c+v}{c-v}\right) = \frac{2\cdot g\cdot t}{c} + k$$

Delogarithmieren: $\frac{c+v}{c-v} = e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} \quad \Leftrightarrow \quad c+v = (c-v)\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}$

Auflösen nach v: $\left(1 + e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}\right)\cdot v = c\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} - c$

$$v = \frac{c\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} - c}{1 + e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}} = \frac{\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k} - 1\right)\cdot c}{1 + e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}+k}}$$

Allgemeine Lösung: $v(t) = \frac{\left(K e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}} - 1\right)\cdot c}{1 + K\cdot e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}}}$

Anfangsbedingung einsetzen: $v(0) = 0$

$$\frac{\left(K e^{0} - 1\right)\cdot c}{1 + K\cdot e^{0}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(K e^{0} - 1\right)\cdot c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K e^{0} - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad K = 1$$

Partikuläre Lösung: $v(t) = \frac{\left(e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}} - 1\right)\cdot c}{1 + e^{\frac{2\cdot g\cdot t}{c}}}$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\left(\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}} - 1\right) \cdot c}{1 + \underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}}} = \lim_{t \to \infty} \frac{\left(\frac{2 \cdot g}{c} \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}\right) \cdot c}{\left(\frac{2 \cdot g}{c} \cdot e^{\frac{2 \cdot g \cdot t}{c}}\right)} = \lim_{t \to \infty} (c) = c$$

Die Endgeschwindigkeit, die der Körper erreichen kann, ist fast c (Lichtgeschwindigkeit).

Aufgabe 9: Abi 2006 / AII

Beim radioaktiven Zerfall von Uran entsteht Helium. Die zeitabhängige Masse m(t) des Heliums zum Zeitpunkt $t \ge 0$ mit $m(0) = 0$ erfüllt die Differentialgleichung $m'(t) = \left(\frac{4 \cdot m_0}{235} - m(t)\right) \cdot \lambda$.

Dabei ist $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante, m_0 ist die Masse des Urans zum Zeitpunkt t = 0 und $m'(t)$ ist die Ableitung von $m(t)$ nach der Zeit.

a) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

[Ergebnis: $m(t) = \frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$]

b) Ermitteln Sie das Verhalten von m(t) für t $\rightarrow \infty$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für den beschriebenen Zerfallsvorgang?

Teilaufgabe a)

Gegebene DGL: $m' = \left(\frac{4 \cdot m_0}{235} - m\right) \cdot \lambda$

Definition: $k = \frac{4 \cdot m_0}{235}$

Differentialquotient: $\frac{dm}{dt} = (k - m) \cdot \lambda$

Trennen der Variablen: $\frac{dm}{k - m} = \lambda \cdot dt$ $\qquad \frac{dm}{m - k} = -\lambda \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{m - k}\, dm = \int -\lambda\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \ln(|m - k|) = -\lambda \cdot t + c$

Delogarithmieren: $|m - k| = e^{-(\lambda \cdot t) + c}$

Da m<k: $m - k = -C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Allgemeine Lösung: $m(t) = k - C \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Teilaufgabe b)

Einsetzen der Randbedingung: $m(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k - C = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = C$

Spezielle Lösung: $m(t) = k - k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$$m(t) = \frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot t}\right)$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{4 \cdot m_0}{235} \cdot \left(1 - \overset{\overset{0}{\uparrow}}{e^{-\lambda \cdot t}}\right)\right] = \frac{4 \cdot m_0}{235}$$

Es entsteht auf lange Sicht eine Masse $\frac{4 \cdot m_0}{235}$ an Helium.

Aufgabe 10: Abi 2007 / AI

Bei einer chemischen Reaktion vereinigt sich ein Molekül A mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. In einem Laborversuch sind zu Beginn der Reaktion von beiden Molekülarten jeweils M Moleküle vorhanden. Die Umsatzvariable N(t) beschreibt die Anzahl der neuen Moleküle zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$.

Für N(t) gilt in guter Näherung die Differentialgleichung $\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot (M - N(t))^2$, wobei k > 0 eine Konstante ist.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der separierbaren Differentialgleichung für $N(0) = 0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{k \cdot M \cdot t - 1}$]

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von k und M, zu welchem Zeitpunkt t_0 N(t) 99% des Endwertes erreicht hat.

Teilaufgabe a)

Gegebene DGL: $\frac{dN}{dt} = k \cdot (M - N)^2$

Trennen der Variablen: $\frac{dN}{(M - N)^2} = k \cdot dt$ $\qquad N := N$

Integration: $\int \frac{1}{(M - N)^2} \, dN = \int k \, dt + c \rightarrow \frac{1}{M - N} = c + k \cdot t$

Auflösen nach N: $\frac{1}{M - N} = k \cdot t + c$ auflösen, N $\rightarrow M - \frac{1}{c + k \cdot t}$

Allgemeine Lösung: $N(t) = M - \frac{1}{c + k \cdot t}$

Anfangsbedingung: $N(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad M - \frac{1}{c} = 0$ auflösen, c $\rightarrow \frac{1}{M}$

$$N(t) = M - \frac{1}{\frac{1}{M} + k \cdot t} = M - \frac{M}{1 + k \cdot t \cdot M} = \frac{M \cdot (1 + k \cdot t \cdot M) - M}{1 + k \cdot t \cdot M} = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{1 + k \cdot M \cdot t}$$

Partikuläre Lösung: $N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{1 + k \cdot M \cdot t}$

Teilaufgabe b)

$$N(t_0) = 0.99 \cdot M \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{k \cdot M^2 \cdot t_0}{1 + k \cdot M \cdot t_0} = 0.99 \cdot M \text{ auflösen}, t_0 \rightarrow \frac{99.0}{M \cdot k}$$

$$t_0 = \frac{99}{M \cdot k}$$

Aufgabe 11: Abi 2007 / AII

Bei Untersuchungen darüber, wie oft Publikationen zitiert werden, verwendet man zur näherungsweisen Bestimmung den Funktionsterm z(t), der die monatliche Anzahl der Zitate in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) angibt, und den Funktionsterm $z'(t)$, der die momentane Veränderungsrate angibt. Dabei stellt man fest, dass gilt: $z'(t) = \lambda \cdot z(t)$.

Von einer Publikation wird nun über einen größeren Zeitraum die Anzahl der Zitate pro Monat erfasst. Dabei ergibt sich: $z(6) = 950$ und $z(10) = 900$.

Bestimmen Sie z(t), wenn für z(t) obige Differentialgleichung gilt.

Gegebene DGL: $z' = \lambda \cdot z$

Differentialquotient: $\frac{dz}{dt} = \lambda \cdot z$

Trennen der Variablen: $\frac{dz}{z} = \lambda \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{z}\, dz = \int \lambda\, dt + k \rightarrow \ln(|z|) = k + \lambda \cdot t$

Auflösen nach $|z|$: $|z| = e^{\lambda \cdot t + k}$

Da $z > 0$ gilt für die allgemeine Lösung: $z(t) = K \cdot e^{\lambda \cdot t}$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$z(6) = 950$ $\quad K \cdot e^{\lambda \cdot 6} = 950 \quad (1)$

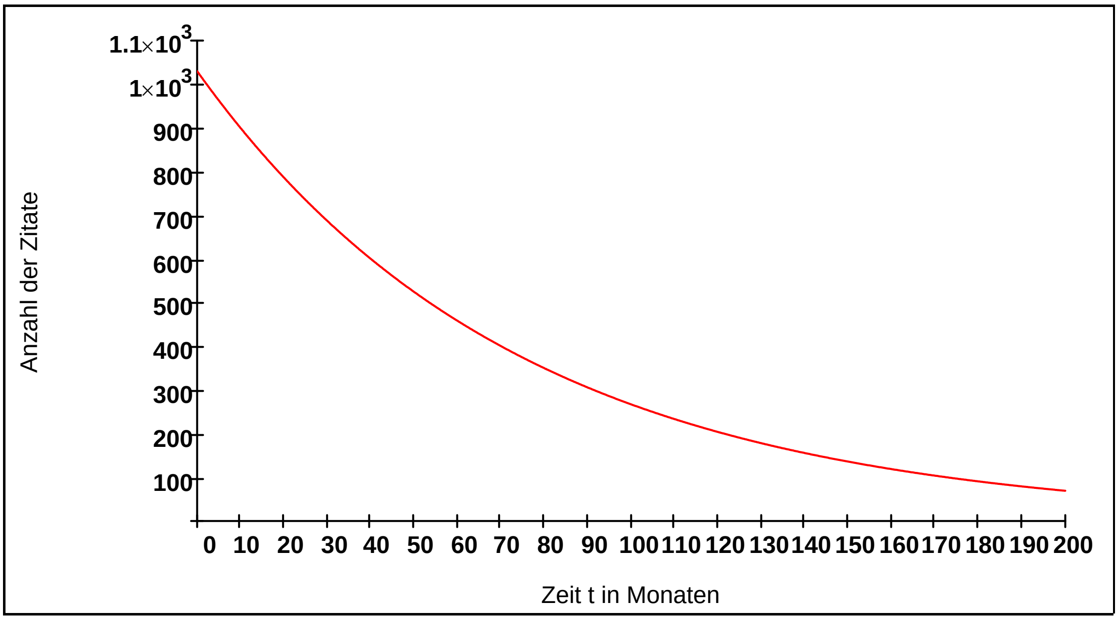
$z(10) = 900$ $\quad K \cdot e^{\lambda \cdot 10} = 900 \quad (2)$

$\frac{(1)}{(2)} \quad e^{6 \cdot \lambda - 10 \cdot \lambda} = \frac{950}{900} \quad \Rightarrow \quad -4 \cdot \lambda = \ln\left(\frac{950}{900}\right)$

$$\lambda := -\left(\frac{1}{4}\cdot\ln\left(\frac{950}{900}\right)\right) \qquad \lambda = -\frac{\ln\left(\frac{19}{18}\right)}{4} = -0.0135$$

eingesetzt in (1) $\qquad K\cdot e^{\lambda\cdot 6} = 950 \text{ auflösen}, K \rightarrow \frac{9025\cdot\sqrt{38}}{54} = 1030$

Partikuläre Lösung: $\qquad z(t) := 1030\cdot e^{-0.0135\cdot t}$



Aufgabe 12: Abi 2008 / AI

Werden ein Kondensator der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R in Reihenschaltung an eine Gleichspannungsquelle der Spannung U angeschlossen, ergibt sich die Differentialgleichung:

$$R \cdot C \cdot Q'(t) + Q(t) = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t.$$

Mit den physikalischen Konstanten C, R, T und U für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator. Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung mithilfe der Variation der Konstanten für $Q(0) = 0$.

Gegebene inhomogene DGL: $R \cdot C \cdot Q' + Q = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t$

Homogene DGL: $R \cdot C \cdot Q' + Q = 0$

Umformung: $Q' = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot Q$

Differentialquotient: $\frac{dQ}{dt} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot Q$

Trennen der Variablen: $\frac{dQ}{Q} = \frac{-1}{R \cdot C} \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{Q}\, dQ = \int \frac{-1}{R \cdot C}\, dt + k \rightarrow \ln(Q) = k - \frac{t}{C \cdot R}$

Delogarithmieren: $Q = e^{\frac{-t}{R \cdot C} + k} = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $Q_H(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Variation de Konstanten: $Q_S(t) = K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}}$

Ableitung: $Q'(t) = K'(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \left(\frac{-1}{R \cdot C}\right)$

Einsetzen in die inhomogene DGL:

$$R \cdot C \cdot \left[K'(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \cdot \left(\frac{-1}{R \cdot C}\right)\right] + K(t) \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t \rightarrow C \cdot R \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{C \cdot R}} = \frac{C \cdot U \cdot t}{T}$$

$$C \cdot R \cdot K'(t) \cdot e^{-\frac{t}{C \cdot R}} = \frac{C \cdot U \cdot t}{T} \text{ auflösen}, K'(t) \rightarrow \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T} \qquad \Rightarrow \qquad K'(t) = \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T}$$

Integration: $$K(t) = \int \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T} \, dt$$

Partielle Integration: $$\int \frac{U \cdot t \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}}}{R \cdot T} \, dt = \frac{C \cdot U \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}} \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

$$Q_S(t) = \left[\frac{C \cdot U \cdot e^{\frac{t}{C \cdot R}} \cdot (t - C \cdot R)}{T} \right] \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \rightarrow Q_S(t) = \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$Q_A(t) = Q_H(t) + Q_S(t) = K \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung: $Q_A(0) = 0$

$$K \cdot e^{0} + \frac{C \cdot U \cdot (0 - C \cdot R)}{T} = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow \frac{C^2 \cdot R \cdot U}{T}$$

Partikuläre Lösung: $$Q_P(t) = \frac{C^2 \cdot R \cdot U}{T} \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} + \frac{C \cdot U \cdot (t - C \cdot R)}{T}$$

$$Q_P(t) = \frac{C \cdot U}{T} \cdot \left(t - R \cdot C + R \cdot C \cdot e^{\frac{-t}{R \cdot C}} \right)$$

Aufgabe 13: Abi 2010 / AI

Für die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers unter dem Einfluss einer zeitlich periodisch wirkenden Kraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft gilt folgende Differentialgleichung:

$$v'(t) + 2 \cdot v(t) = \sin(2 \cdot t).$$

Der Körper soll zum Zeitpunkt t = 0 aus der Ruhe heraus starten.
Ermitteln Sie v(t) mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

Gegebene inhomogene DGL: $v' + 2 \cdot v = \sin(2 \cdot t)$

Homogene DGL: $v' + 2 \cdot v = 0$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} = -2 \cdot v$

Trennen der Variablen: $\frac{dv}{v} = -2 \cdot dt$

Integration: $\int \frac{1}{v} \, dv = \int -2 \, dt + k \rightarrow \ln(|v|) = k - 2 \cdot t$

Da $v > 0$ $\quad v = e^{-2 \cdot t + k}$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $v_H(t) = K \cdot e^{-2 \cdot t}$

Variation der Konstanten: $v_S(t) = K(t) \cdot e^{-2 \cdot t}$

Ableitungsfunktion: $v'_S(t) = K'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} + K(t) \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (-2)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $v' + 2 \cdot v = \sin(2 \cdot t)$

$$K'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} + K(t) \cdot e^{-2 \cdot t} \cdot (-2) + 2 \cdot \left(K(t) \cdot e^{-2 \cdot t}\right) = \sin(2 \cdot t) \rightarrow K'(t) \cdot e^{-2 \cdot t} = \sin(2 \cdot t)$$

$$\Rightarrow \quad K'(t) = \sin(2 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t}$$

$$\Rightarrow \quad K(t) := \int \sin(2 \cdot t) \cdot e^{2 \cdot t} \, dt$$

Partielle Integration: $K(t) = -\frac{e^{2 \cdot t} \cdot (\cos(2 \cdot t) - \sin(2 \cdot t))}{4}$

Spezielle Lösung:

$$v_S(t) := \left[-\frac{e^{2 \cdot t} \cdot (\cos(2 \cdot t) - \sin(2 \cdot t))}{4}\right] \cdot e^{-2 \cdot t} \qquad v_S(t) = \frac{\sin(2 \cdot t)}{4} - \frac{\cos(2 \cdot t)}{4}$$

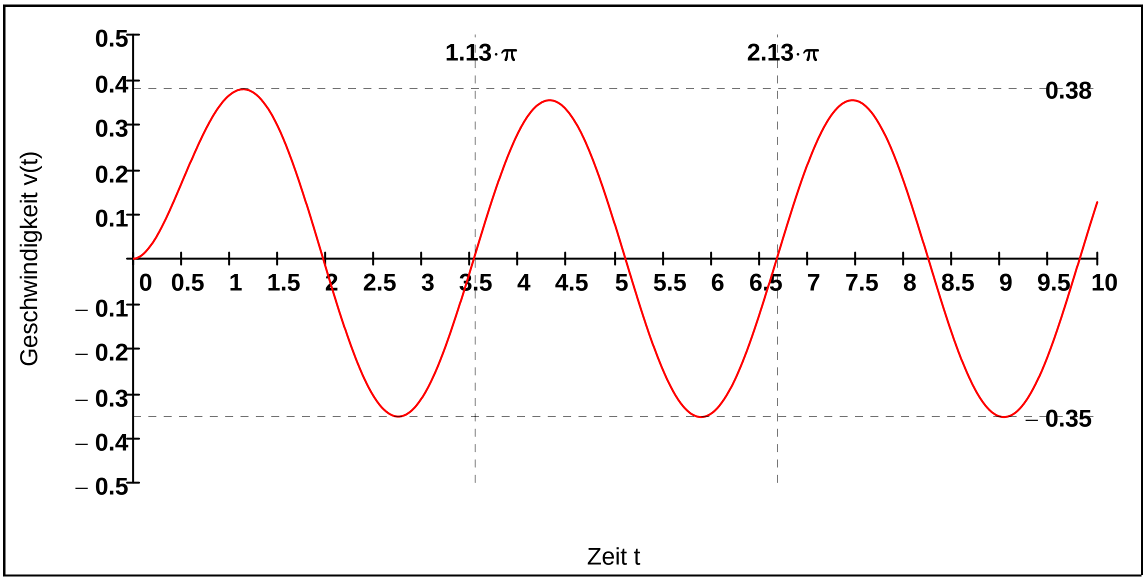
Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$v_A(t,K) := K\cdot e^{-2\cdot t} + \left(\frac{\sin(2\cdot t)}{4} - \frac{\cos(2\cdot t)}{4}\right)$$

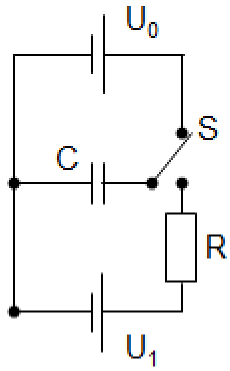
Bestimmung von K durch Einsetzen der Anfangsbedingung: $K := K$

$$v_A(0,K) = 0 \qquad K\cdot e^{0} + \left(\frac{\sin(0)}{4} - \frac{\cos(0)}{4}\right) = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow \frac{1}{4}$$

Partikuläre Lösung: $$v_P(t) := \frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot t} + \left(\frac{\sin(2\cdot t)}{4} - \frac{\cos(2\cdot t)}{4}\right)$$



Aufgabe 14: Abi 2009 / AI



Ein Kondensator mit der Kapazität C wird an der Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 aufgeladen. Für die Beträge U_0 und U_1 der Spannungen gilt: $U_1 < U_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S umgelegt, sodass sich der Kondensator der Kapazität C über den ohmschen Widerstand R entladen kann. Während des Entladevorgangs gilt für den Betrag $U = U(t)$ der Spannung am Kondensator die Differentialgleichung $U'(t) = a \cdot (U_1 - U(t))$ mit $U'(t) = \frac{dU(t)}{dt}$ und $a = \frac{1}{R \cdot C}$.

Berechnen Sie die spezielle Lösung $U(t)$ der obigen Differentialgleichung, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Spannung am Kondensator gilt: $U(0) = 3 \cdot U_1$

$$U' = -a \cdot (U - U_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dU}{dt} = -a \cdot (U - U_1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{U - U_1} = -a \cdot dt$$

Integration: $$\int \frac{1}{U - U_1} \, dy = \int -a \, dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(|U - U_1|) = -a \cdot t + k$$

Auflösen: $$|U - U_1| = e^{-a \cdot t + k} = K \cdot e^{-a \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad U(t) = U_1 + K \cdot e^{-a \cdot t} \qquad \text{mit } K \in \mathrm{IR}$$

$$U(0) = 3 \cdot U_1$$

einsetzen $$U(0) = U_1 + K \cdot e^0 = 3 \cdot U_1$$

$$U_1 + K = 3 \cdot U_1 \text{ auflösen}, K \rightarrow 2 \cdot U_1$$

$$U(t) = U_1 + 2 \cdot U_1 \cdot e^{-a \cdot t} = U_1 \left(1 + 2 \cdot e^{-a \cdot t}\right)$$

Aufgabe 15: Abi 2008 / AII

In der folgenden Aufgabe soll die Differentialgleichung für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz eines radioaktiven Mutter-Tochter-Zerfalls untersucht werden. Von der radioaktiven Muttersubstanz mit der Zerfallskonstanten $\lambda_M > 0$ liegen zur Zeit t = 0 N_0 Atome vor.

Die ebenfalls radioaktive Tochtersubstanz zerfällt mit der Zerfallskonstanten $\lambda_T = 0$.

Für die Teilchenzahl $n(t)$ der Tochtersubstanz gilt für $t \geq 0$ folgende Differntialgleichung:

$$n'(t) = \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n(t).$$

a) Bestimmen Sie die Lösung n(t) für $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$ mithilfe der Variation der Konstanten, wenn gilt: $n(t) = 0$.

b) Lösen Sie nun obige Differentialgleichung für n(t) für $\lambda_M \neq \lambda_T$, wenn ebenfalls gilt: $n(t) = 0$.

[Ergebnis: $n(t) = \dfrac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(e^{-\lambda_M \cdot t} - e^{-\lambda_T \cdot t}\right)$]

c) Begründen Sie für den Fall $\lambda_M \neq \lambda_T$ in Abhängigleit von λ_M und λ_T ohne Verwendung von $n'(t)$, dass $n(t)$ ein absolutes Maximum besitzt.
Berechnen Sie nun den Zeitpunkt t_{max} mithilfe von $n'(t)$.

Teilaufgabe a)

Gegebene inhomogene DGL: $\quad n' = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n$

Mit $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$: $\quad \Rightarrow \quad n' = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} - \lambda \cdot n$

Inhomogene DGL: $\quad n' + \lambda \cdot n = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Homogene DGL: $\quad n' + \lambda \cdot n = 0$

Differentialquotient: $\quad \dfrac{dn}{dt} = -\lambda \cdot n$

Trennen der Variablen: $\quad \dfrac{dn}{n} = -\lambda \cdot dt$

Integration: $\quad \displaystyle\int \frac{1}{n}\, dn = \int -\lambda\, dt + k \rightarrow \ln(|n|) = k - \lambda \cdot t$

Da $n > 0$ $\quad n = e^{-\lambda \cdot t + k}$

Allgemeine Lösung des homogenen DGL: $\quad n_H(t) = K \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

Variation der Konstanten: $n_S(t) = K(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

Ableitungsfunktion: $n'_S(t) = K'(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t} + K(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot(-\lambda)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $n' + \lambda\cdot n = \lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

$$K'(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t} + K(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\cdot(-\lambda) + \lambda\cdot\left(K(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t}\right) = \lambda\cdot N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t} \rightarrow K'(t)\cdot e^{-\lambda\cdot t} = N_0\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

$\Rightarrow \quad K'(t) = N_0\cdot\lambda$

$\Rightarrow \quad K(t) := \int N_0\cdot\lambda\, dt$

Integration: $K(t) = N_0\cdot\lambda\cdot t$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$n_A(t) = K\cdot e^{-\lambda\cdot t} + N_0\cdot\lambda\cdot t\cdot e^{-\lambda\cdot t}$$

Bestimmung von K durch Einsetzen der Anfangsbedingung: $n_A(0, K) = 0$

$K := K \qquad K\cdot e^0 + N_0\cdot\lambda\cdot 0\cdot e^0 = 0$ auflösen, $K \rightarrow 0$

Partikuläre Lösung: $n_P(t) = N_0\cdot\lambda\cdot t\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

Teilaufgabe b)

$\lambda_T \neq \lambda_M$

Gegebene inhomogene DGL: $n' = \lambda_M\cdot N_0\cdot e^{-\lambda_M\cdot t} - \lambda_T\cdot n$

Homogene DGL: $n' + \lambda_T\cdot n = 0$

Differentialquotient: $\dfrac{dn}{dt} = -\lambda_T\cdot n$

Trennen der Variablen: $\dfrac{dn}{n} = -\lambda_T\cdot dt$

Integration: $$\int \frac{1}{n}\,dn = \int -\lambda_T\,dt + k \rightarrow \ln(|n|) = k - t\cdot\lambda_T$$

Da $n > 0$ $$n = e^{-\lambda_T\cdot t+k}$$

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $$n_H(t) = K\cdot e^{-\lambda_T\cdot t}$$

Variation der Konstanten: $$n_S(t) = K(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t}$$

Ableitungsfunktion: $$n'_S(t) = K'(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t} + K(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t}\cdot(-\lambda_T)$$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $$n' + \lambda_T\cdot n = \lambda_M\cdot N_0\cdot e^{-\lambda_M\cdot t}$$

$$K'(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t} + K(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t}\cdot(-\lambda_T) + \lambda_T\cdot\left(K(t)\cdot e^{-\lambda_T\cdot t}\right) = \lambda_M\cdot N_0\cdot e^{-\lambda_M\cdot t}$$

Vereinfacht und aufgelöst:

$$K'(t)\cdot e^{-t\cdot\lambda_T} = N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{-t\cdot\lambda_M} \text{ auflösen}, K'(t) \rightarrow N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot\lambda_T}\cdot e^{-t\cdot\lambda_M}$$

$$\Rightarrow \qquad K'(t) = N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot(\lambda_T-\lambda_M)}$$

$$\Rightarrow \qquad K(t) = \int N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot(\lambda_T-\lambda_M)}\,dt$$

Integration: $$\int N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot(\lambda_T-\lambda_M)}\,dt = \frac{N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot(\lambda_T-\lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}$$

$$K(t) = \frac{N_0\cdot\lambda_M\cdot e^{t\cdot(\lambda_T-\lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$n_A(t) = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \left[\frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (\lambda_T - \lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}\right] \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \left[\frac{N_0 \cdot \lambda_M \cdot e^{t \cdot (-\lambda_M)}}{\lambda_T - \lambda_M}\right]$$

$$n_A(t) = K \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$$

Bestimmung von K durch Einsetzen der Anfangsbedingung: $n_A(0, K) = 0$

$K := K$ $\qquad K \cdot e^0 + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^0 = 0 \text{ auflösen}, K \rightarrow -\frac{N_0 \cdot \lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M}$

Partikuläre Lösung: $\quad n(t) = -\frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} + \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$

$$n(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-e^{-\lambda_T \cdot t} + e^{-\lambda_M \cdot t}\right)$$

Teilaufgabe c)

Definitionsmenge von n(t): $\quad t \in [\,0\,;\,\infty\,[$

linker Randwert: $\quad n(0) = 0$

rechter Randwert: $\quad \lim_{t \to \infty} \left[\frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-\underbrace{e^{-\lambda_T \cdot t}}_{\to 0} + \underbrace{e^{-\lambda_M \cdot t}}_{\to 0}\right)\right] = 0$

Funktion ist stetig und besitzt auf dem linken Rand sowie auf dem rechten Rand den Funktionswert Null, d. h. es muss ein absolutes Maximum geben.

Ableitungsfunktion: $\quad n'(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(\lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} - \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}\right)$

Horizontale Tangenten: $\quad n'(t) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} - \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_T \cdot e^{-\lambda_T \cdot t} = \lambda_M \cdot e^{-\lambda_M \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_T}{\lambda_M} = \frac{e^{-\lambda_M \cdot t}}{e^{-\lambda_T \cdot t}}$$

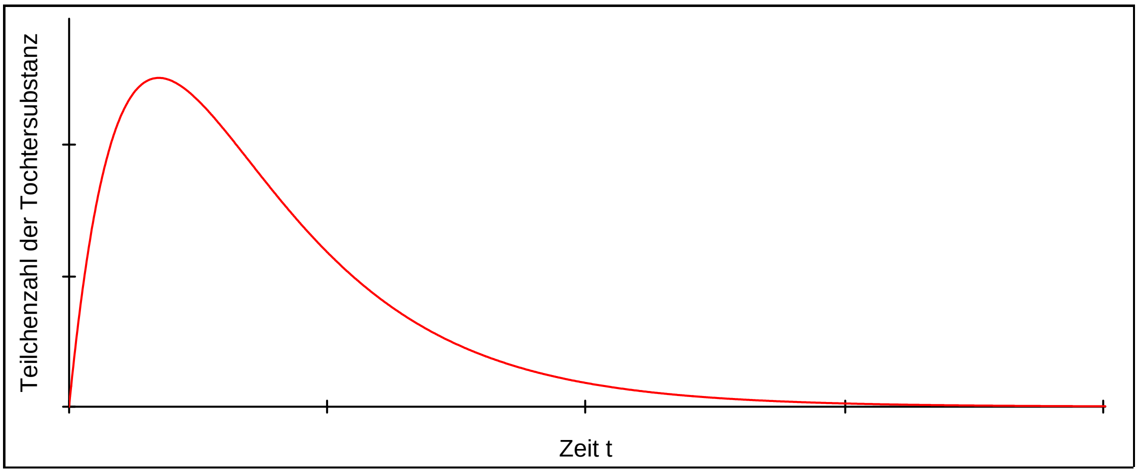
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lambda_T}{\lambda_M} = e^{\lambda_T \cdot t - \lambda_M \cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_T \cdot t - \lambda_M \cdot t = \ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\lambda_T - \lambda_M\right) \cdot t = \ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)$$

$$t_{max} = \frac{\ln\left(\frac{\lambda_T}{\lambda_M}\right)}{\lambda_T - \lambda_M}$$

Modellfunktion zu: $\quad n(t) := \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(-e^{-\lambda_T \cdot t} + e^{-\lambda_M \cdot t}\right)$



Aufgabe 16: Abi 2011 / AI

Ein spezieller Fallschirm gehorcht beim Sinkflug folgender Differentialgleichung:

$$v' = \frac{1}{20}\cdot\left(25 - v^2\right).$$

Dabei steht v(t) für die Maßzahl der Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ mit $0 \le v < 5$ und t für die Maßzahl der Zeit in s mit $t \ge 0$.

Ermitteln Sie die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung für $v(0) = 0$.

Gegebene DGL: $v' = \frac{1}{20}\cdot\left(25 - v^2\right)$

Verwendung des Differentialquotienten: $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{20}\cdot\left(25 - v^2\right)$

Separation der Variablen: $\frac{dv}{25 - v^2} = \frac{1}{20}dt$

Integration: $\int \frac{1}{25 - v^2}\,dv = \frac{1}{20}\cdot\int 1\,dt$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{1}{25 - v^2} = \frac{A}{5 - v} + \frac{B}{5 + v} = \frac{A\cdot(5 + v) + B\cdot(5 - v)}{25 - v^2} = \frac{(A - B)\cdot v + 5\cdot(A + B)}{25 - v^2}$$

Koeffizientenvergleich:

Vorgabe

$A - B = 0 \qquad A + B = \frac{1}{5}$

$$\text{Suchen}(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{A}{5 - v} + \frac{B}{5 + v} = \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5 - v} + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5 + v}$$

Durchführung der linken Seite der Integration:

$$\int \frac{1}{25 - v^2}\,dv = \frac{1}{10}\cdot\int \left(\frac{1}{5 + v} + \frac{1}{5 - v}\right)dv = \frac{1}{10}\cdot\left(\ln(|5 + v|) - \ln(|5 - v|)\right) = \frac{1}{10}\cdot\ln\left(\frac{5 + v}{5 - v}\right)$$

Bemerkung: Der Betrag kann wegen der Definitionsmenge von v weggelaseen werden.

Durchführung der rechten Seite der Integration:

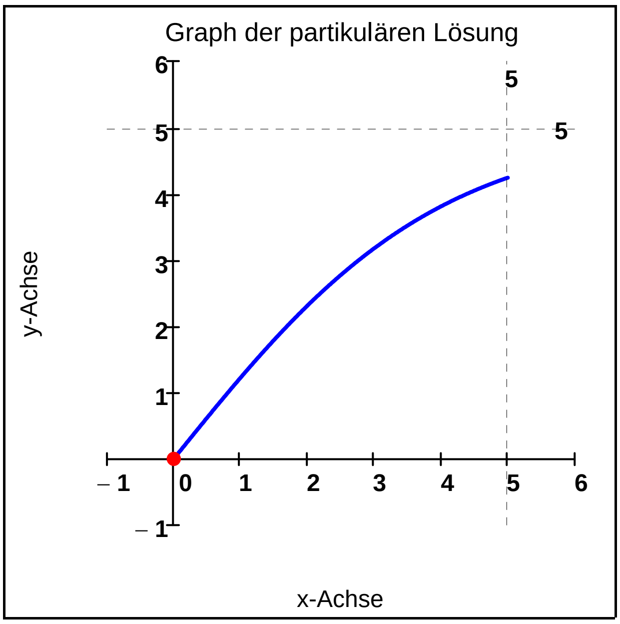
$$\frac{1}{20} \cdot \int 1 \, dt + C = C + \frac{t}{20}$$

Integralgleichung: $\frac{1}{10} \cdot \ln\left(\frac{5+v}{5-v}\right) = \frac{t}{20} + C$

Anfangsbedingung: $v(0) = 0$ $\frac{1}{10} \cdot \ln\left(\frac{5+0}{5-0}\right) = \frac{0}{20} + C$ auflösen, $C \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{10} \cdot \ln\left(\frac{5+v}{5-v}\right) = \frac{t}{20} \text{ auflösen}, v \rightarrow \frac{5 \cdot e^{\frac{t}{2}} - 5}{e^{\frac{t}{2}} + 1}$$

Partikuläre Lösung $v(t) := \frac{5 \cdot e^{\frac{t}{2}} - 5}{e^{\frac{t}{2}} + 1}$



Aufgabe 17: Abi 2011 / AII

Eine Kugel der Masse m befindet sich in einer Flüssigkeit und wird zum Zeitpunkt t = 0 aus der Ruhe heraus losgelassen. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ hat die Kugel eine Strecke der Länge s(t) durchfallen und besitzt zu diesem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ sowie die Beschleunigung $a(t)$. Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur die Maßzahlen der physikalischen Größen verwendet.
Für die Geschwindigkeit v(t) der Kugel gilt die folgende Differentialgleichung:
$m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$, wobei g und k weitere physikalische Konstanten sind.

a) Bestimmen Sie v(t) mit der Methode der Variation der Konstanten.

b) Für v(t) einer speziellen Kugel gilt: $v(t) = 19.6 \cdot \left(1 - e^{-0.5 \cdot t}\right)$ für $t \geq 0$.
Zum Zeitpunkt t_1 mit $t_1 \geq 0$ besitzt die Kugel die Beschleunigung $a_1 = v'(t_1)$

Zeigen Sie, dass die Zeitdauer T_H, in der sich die Beschleunigung a_1 halbiert, unabhängig von t_1 ist und berechnen Sie T_H.
Ermitteln Sie die Streckenlänge, welche die Kugel bis zum Zeitpunkt t = 2,5 durchfällt, auf eine Nachkommastelle.

Teilaufgabe a)

DGL: $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$

Umformung liefert die inhomogene DGL: $v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g$

1. Lösung der homogenen DGL

$v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = 0 \quad \Rightarrow$ **tiviale Lösung:** $v(t) = 0$

Differentialquotient: $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} \cdot v = 0$

Variable trennen: $\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} \cdot dt$ mit $v \neq 0$

Integrieren: $\int \frac{1}{v} \, dv = \int -\frac{k}{m} \, dt + C \rightarrow \ln(v) = C - \frac{k \cdot t}{m}$

kein Betrag, da $v \geq 0$ gilt:

Nach y auflösen: $\ln(v) = C - \frac{k \cdot t}{m}$ auflösen, $v \rightarrow e^{\frac{C \cdot m - k \cdot t}{m}}$

Mit $D = e^C > 0$ folgt: $v_h(t) = D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$ Lösung der homogenen DGL

2. Lösung der inhomogenen DGL

Variation der Konstanten $v_h(t) = D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$

Ableitung durch Anwendung der Produktregel: $v'(t) = D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right)$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g$

$$D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} + D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} \cdot \left(-\frac{k}{m}\right) + \frac{k}{m} \cdot \left(D(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right) = g$$

$$\Leftrightarrow \quad D'(t) \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t} = g \quad \Leftrightarrow \quad D'(t) = g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t}$$

Integration: $D(t) = \int g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t} \, dt = g \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t} + C$

Spezielle Lösung mit $C = 0$ $v_s(t) = g \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$ vereinfachen $\rightarrow v_s(t) = \frac{g \cdot m}{k}$

3. Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

$$v(t) = v_s(t) + v_h(t) = \frac{g \cdot m}{k} + D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

4. Einsetzen der Anfangsbedingung

$$v(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{g \cdot m}{k} + D \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = 0 \text{ auflösen}, D \rightarrow -\frac{g \cdot m}{k}$$

$$\Leftrightarrow \quad v(t) = \frac{g \cdot m}{k} - \frac{g \cdot m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

$$\boxed{v(t) = \frac{g \cdot m}{k} \cdot \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}\right)}$$

Teilaufgabe b)

Funktionsterm: $v(t) := 19.6\cdot\left(1 - e^{-0.50\cdot t}\right)$

Beschleunigung: $a(t) := \frac{d}{dt}v(t) \;=\; 9.8\cdot e^{-0.5\cdot t}$

zu zeigen: $a\left(t_1 + T_H\right) = \frac{1}{2}\cdot a\left(t_1\right)$

$\Leftrightarrow$ $9.8\cdot e^{-0.5\cdot\left(t_1+T_H\right)} = \frac{1}{2}\cdot\left(9.8\cdot e^{-0.5\cdot t_1}\right)$

$\Leftrightarrow$ $9.8\cdot e^{-0.5\cdot t_1}\cdot e^{-0.5\cdot T_H} = \frac{9.8}{2}\cdot e^{-0.5\cdot t_1}$

$\Leftrightarrow$ $e^{\frac{-1}{2}\cdot T_H} = \frac{1}{2}$ auflösen, $T_H \;\rightarrow \ln(4)$ unabhängig von t_1

$T_H := \ln(4)$

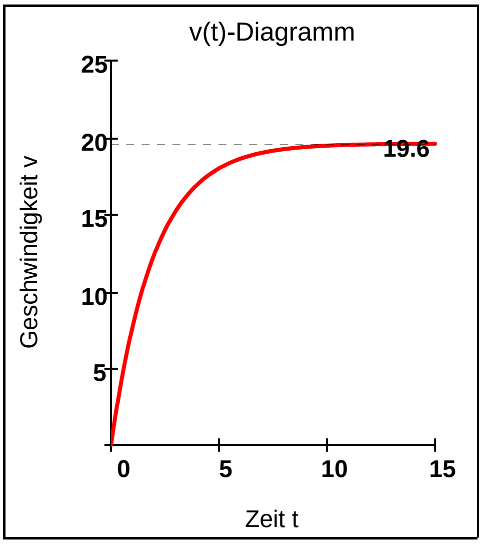
Streckenlänge allgemein: $s(t) = \int v(t)\,dt + C = \int 19.6\cdot\left(1 - e^{-0.50\cdot t}\right)\,dt + C$

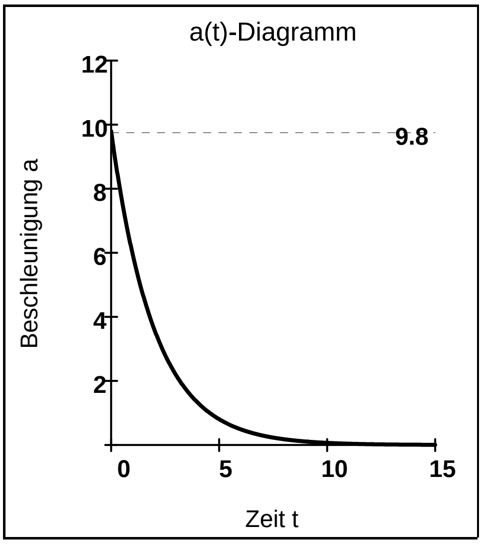
Streckenlänge konkret: $s_{2.5} := \left[\int_0^{2.5} 19.6\cdot\left(1 - e^{-0.50\cdot t}\right)\,dt\right]$ $s_{2.5} = 21.0$

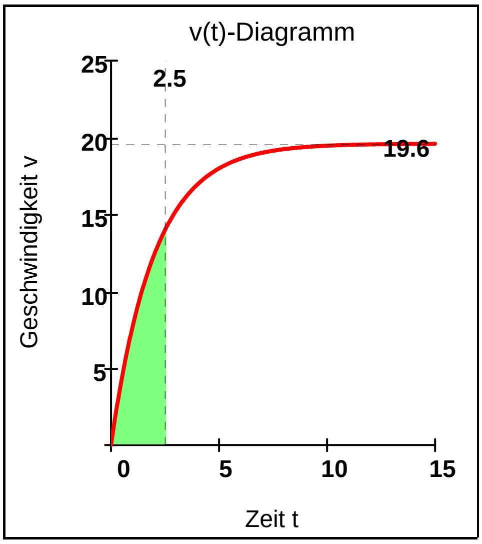
Folgende Darstellungen in der Prüfung nicht verlangt:

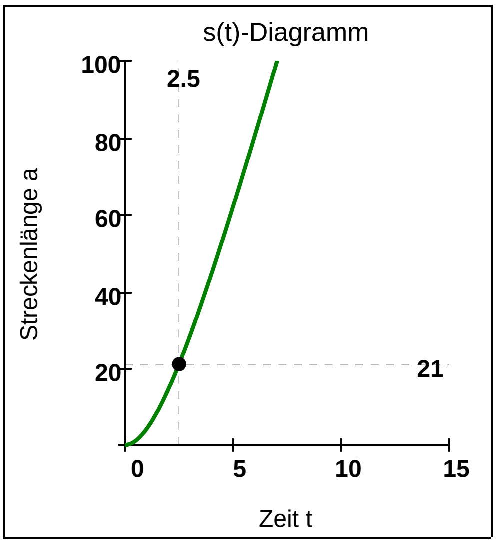
$$v(t) := 19.6 \cdot \left(1 - e^{-0.50 \cdot t}\right) \qquad a(t) := \frac{d}{dt} v(t) \rightarrow 9.8 \cdot e^{-0.5 \cdot t}$$

$$s(t) := \int_0^t v(\tau)\, d\tau = \int_0^t -19.6 \cdot e^{-0.5 \cdot \tau} + 19.6\, d\tau \qquad s(t) = 19.6 \cdot t + 39.2 \cdot e^{-0.5 \cdot t} - 39.2$$









$s(2.5) = 21.031$

Aufgabe 18: Abi 2013 / AI

Ein 20 cm großer Nadelbaum wird zum Zeitpunkt $t = 0$ gepflanzt. Das weitere Wachstum des Baumes wird in guter Näherung beschrieben durch die Differentialgleichung

$$x'(t) = 0.0025 \cdot x(t) \cdot (40 - x(t)) \text{ mit } 0.2 \le x < 40.$$

Dabei ist $x(t)$ die Höhe des Baumes in Metern in Abhängikeit von der Zeit t in Jahren.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

[Mögliches Ergebnis: $x(t) = \dfrac{40}{1 + 199 \cdot e^{-0.10 \cdot t}}$]

b) Berechnen Sie die Höhe, die der Baum auf lange Sicht erreicht und den Zeitpunkt t_0, in dem der Baum die Hälfte seiner maximalen Höhe erreicht hat. Berechnen Sie $x'(t_0)$ geschickt und interpretieren Sie ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Teilaufgabe a)

Inhomogene DGL: $x'(t) = 0.0025 \cdot x(t) \cdot (40 - x(t))$

Verwendung des Differentialquotienten: $\dfrac{dx}{dt} = 0.0025 \cdot x(t) \cdot (40 - x(t))$

Trennen der Variablen: $\dfrac{dx}{x \cdot (40 - x)} = \dfrac{1}{400} \cdot dt$

Integralgleichung: $\displaystyle\int \frac{1}{x \cdot (40 - x)} \, dx = \int \frac{1}{400} \, dt$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{x \cdot (40 - x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{40 - x} = \dfrac{A \cdot (40 - x) + B \cdot x}{x \cdot (40 - x)} = \dfrac{40 \cdot A + (B - A) \cdot x}{x \cdot (40 - x)}$

Koeffizientenvergleich: $40 \cdot A = 1 \quad \Rightarrow \quad A := \dfrac{1}{40}$

$B - A = 0 \quad \Rightarrow \quad B := \dfrac{1}{40}$

Integration: $\displaystyle\frac{1}{40} \cdot \int \frac{1}{x} + \frac{1}{40 - x} \, dx = \frac{1}{400} \cdot t$

$$\ln(|x|) - \ln(|40 - x|) = \frac{1}{10} \cdot t + k$$

$0.2 \le x < 40 \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\dfrac{x}{40 - x}\right) = \dfrac{1}{10} \cdot t + C$

Auflösen nach x: $\frac{x}{40-x} = e^k \cdot e^{\frac{1}{10}\cdot t}$ auflösen, x $\rightarrow \frac{40 \cdot e^k \cdot e^{\frac{t}{10}}}{e^k \cdot e^{\frac{t}{10}} + 1}$

Allgemeine Lösung: $x(t,K) := \frac{40 \cdot K \cdot e^{\frac{t}{10}}}{K \cdot e^{\frac{t}{10}} + 1}$

Anfangsbedingung einsetzen: $x(0,K) = \frac{2}{10} \rightarrow \frac{40 \cdot K}{K+1} = \frac{1}{5}$ auflösen, K $\rightarrow \frac{1}{199}$

Spezielle Lösung: $x(t) := x\left(t, \frac{1}{199}\right) = \frac{40 \cdot e^{\frac{t}{10}}}{e^{\frac{t}{10}} + 199}$ $\qquad x(t) := \frac{40}{1 + 199 \cdot e^{\frac{-1}{10}\cdot t}}$

Teilaufgabe b)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{40}{1 + 199 \cdot e^{\frac{-1}{10}\cdot t}} \rightarrow 40$$

Der Baum ereicht auf Lange Sicht eine Höhe von 40 m.

$$\downarrow$$
$$0$$

$$\frac{40}{1 + 199 \cdot e^{\frac{-1}{10}\cdot t}} = 20 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = 1 + 199 \cdot e^{\frac{-1}{10}\cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{199} = e^{\frac{-1}{10}\cdot t}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{10} \cdot t = \ln\left(\frac{1}{199}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t_0 := -10 \cdot \ln\left(\frac{1}{199}\right)$$

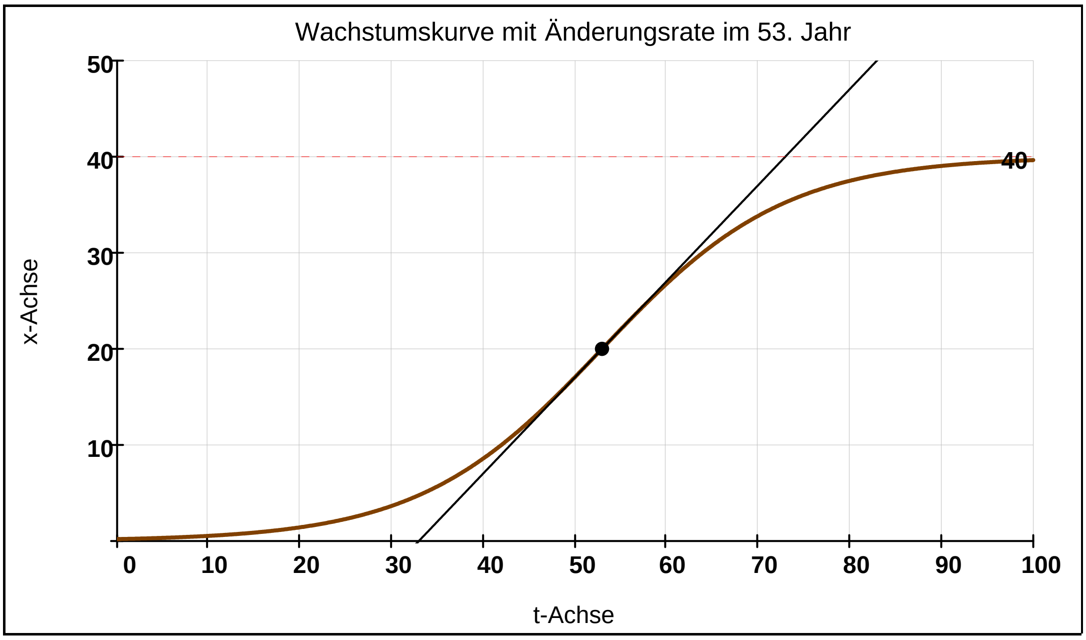
Zeitpunkt für die halbe Höhe: $t_0 = 52.933$ gerundet: $t_0 = 53$

Änderungsrate: $x'(t) := \frac{d}{dt}x(t) = \frac{796 \cdot e^{-\frac{t}{10}}}{\left(199 \cdot e^{-\frac{t}{10}} + 1\right)^2}$

$$x'(t_0) = \frac{796 \cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot\left(-10 \cdot \ln\left(\frac{1}{199}\right)\right)}}{\left[199 \cdot e^{-\frac{1}{10}\cdot\left(-10 \cdot \ln\left(\frac{1}{199}\right)\right)} + 1\right]^2} = \frac{\frac{796}{199}}{\left(\frac{199}{199} + 1\right)^2} = \frac{4}{4} = 1$$

Im 53. Jahr wächst der Baum etwa 1 m.

$$g(t) := x'(t_0) \cdot (t - t_0) + x(t_0)$$



Aufgabe 19: Abi 2014 / AII

Ein Körper wird für $t \geq 0$ durch eine zeitlich konstante Kraft beschleunigt und unterliegt einer zur Geschwindigkeit $v(t)$ proportionalen Reibungskraft. Die Bewegung des Körpers wird dabei durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $10 \cdot v' + v = 40$ mit $v'(t) = \frac{dv(t)}{dt}$. Die Einheiten für t und v (Sekunde und Meter pro Sekunde) bleiben bei der Rechnung unberücksichtigt.
Bestimmen Sie $v(t)$ für $t \geq 0$ mithilfe der Methode der Variation der Konstanten für die Anfangsbedingung $v(0) = 10$.

Inhomogene DGL: $10 \cdot v' + v = 40 \quad \Leftrightarrow \quad v' + \frac{v}{10} = 4$

Homogene DGL: $v' + \frac{v}{10} = 0 \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{-v}{10}$ Triviale Lösung: $v = 0$

Trennen der Variablen: $\frac{dv}{v} = \frac{-1}{10} \cdot dt$ mit $v \neq 0$

$$\int \frac{1}{v}\, dt = \int \frac{-1}{10}\, dt$$

Integration: $\ln(v) = \frac{-1}{10} \cdot t + k$ (Betrag nicht nötig)

Delogarithmieren: $v = e^{\frac{-1}{10} \cdot t + k} = K \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$ mit K $\in$ IR.

Allgemeine Lösung der homogenen DGL: $v_h(t) = K \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$

Variation der Konstanten: $v_p(t) = K(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$

$$v'_p(t) = K'(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + K(t) \cdot \left(\frac{-1}{10}\right) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}$$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$K'(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + K(t) \cdot \left(\frac{-1}{10}\right) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + \frac{1}{10} \cdot K(t) \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} = 4$$

Auflösen: $K'(t) = 4 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}$

Integrieren: $K(t) = \int 4 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}\, dt = 4 \cdot (10) \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t}$

Spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $v_p(t) = 40 \cdot e^{\frac{1}{10} \cdot t} \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} = 40$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL: $v_A(t) = K \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + 40$

Anfangsbedingung einsetzen: $v_A(0) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad K + 40 = 10 \quad \Leftrightarrow \quad K = -30$

Spezielle Lösung: $v_A(t) = -30 \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t} + 40 \qquad \boxed{v_A(t) = 40 - 30 \cdot e^{\frac{-1}{10} \cdot t}}$