Abiturprüfungsaufgaben zu gewöhnlichen Differentialgleichungen

Aufgabe 1: Abi 1999 / AI

Ein erhitzter Körper kühlt sich im Laufe der Zeit allmählich auf die konstante Temperatur a (in °C) seiner Umgebung ab. Seine Temperatur y (in °C) wird zu jedem Zeitpunkt t (in Sekunden) durch y(t) beschrieben.

a) Bestimmen Sie die allgemeine Gleichung der Abkühlungskurve y(t), wenn für den Abkühlungsvorgang folgende Differentialgleichung gilt:

$$\dot{y}(t) = -b^2 \cdot (y - a)$$

($\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$ ist die Ableitung von y(t) nach der Zeit, der zeitlich konstante Faktor b^2 beschreibt die physikalische Beschaffenheit des Körpers.)

b) Der Körper hat zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Temperatur von 40 (°C), wobei die Umgebungstemperatur 21 (°C) beträgt. Berechnen Sie den Zeitpunkt, in dem der Körper auf 35 (°C) abgekühlt ist, für $b^2 = 6{,}0 \cdot 10^{-3}$ (in s^{-1}).

Aufgabe 2: Abi 2000 / AI

Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit v(t) der Kugel zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$ gilt folgende Differentialgleichung: $k \cdot v' + v = g \cdot b$.

Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und k, b > 0 Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

a) Bestimmen Sie v(t) mit der Methode der Variation der Konstanten.

[Ergebnis: $v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)$]

b) Ermitteln Sie das Verhalten von v(t) für $t \to \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

Aufgabe 3: Abi 2002 / AI

Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzen die 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys. Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm f(t) beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

a) Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t für $t \geq 0$ die Differentialgleichung:

$\dot{f}(t) = 0{,}2 \cdot \left[60 \cdot 10^6 - f(t)\right]$, wobei $\dot{f}(t)$ die Ableitung von f(t) nach der Zeit ist.

Leiten Sie aus dieser Differentialgleichung den Funktionsterm f(t) her.

b) Nun soll gelten: $f(t) = 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 \cdot e^{-0{,}2\,t}$

Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat. Berechnen Sie den Zeitpunkt t, $t \geq 0$, an dem 60% der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

Aufgabe 4: Abi 2002 / AII

Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration y(t) mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt.
Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter. Gleichzeitig fließt dieselbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration y(t) der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differentialgleichung
$\dot{y}(t) = \frac{Q}{V} \cdot k_0 - \frac{Q}{V} \cdot y(t)$ mit Q, k_0 und V konstant, $t \geq 0$.
Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C, wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Behälter eine Kupfersulfatlösung mit der Konzentration $30\frac{g}{l}$ befindet und $k_0 = 24\frac{g}{l}$ ist.

[Teilergebnis: $y(t) = C \cdot e^{-\frac{Q}{V} \cdot t} + k_0$]

Aufgabe 5: Abi 2003 / AI

Die chemische Verbindung Mixoflux zerfällt beim Erhitzen je nach Masse der Probe innerhalb einiger Minuten. Bei einem Versuch beträgt die Anfangsmasse der Probe an Mixoflux 1,00 g. x sei die in der Zeit t (gemessen in Minuten) zerfallene Masse.

Die zugehörige Differentialgleichung ist: $2 \cdot \dot{x} = (1+x) \cdot (1-x)$ mit $x \in [\,0\,;1\,[$.

Dabei ist $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ die Ableitung der Funktion x nach der Variablen t.

a) Bestimmen Sie für die Funktion x einen Funktionsterm x(t).
   Auf die Verwendung von Einheiten wird während der Rechnung verzichtet.

b) Für einen „vollständigen Zerfall“ genügt es im Allgemeinen, wenn 99,9% der Anfangsmenge zerfallen ist. Nach welcher Zeit tritt dieses Ereignis ein?

Aufgabe 6: Abi 2004 / AII

Schließt man an eine reale Spule zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannung mit $U = U_0$ an, dann gilt für die Stromstärke J(t) die Differentialgleichung $U_0 - L \cdot \dot{J}(t) - R \cdot J(t) = 0$, wobei U_0, R und L konstante Größen sind und $\dot{J}(t)$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist. Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differentialgleichung für die Stromstärke J(t) für die Anfangsbedingung $J(0) = 0$.

Aufgabe 7: Abi 2005 / AI

Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differentialgleichung:
$\dot{N}(t) = 0{,}1 \cdot N(t) \cdot \left[5 - N(t)\right]$.
N(t) umfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t \geq 0$.
Dabei gilt: $0 < N(0) < 4{,}5$.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0{,}5\,t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0{,}5\,t}}$]

b) Berechnen Sie allgemein, auf welchen Endwert die Anzahl der Exemplare dieser Pflanzenart auf lange Sicht anwachsen wird und zu welchem Zeitpunkt t^* 90 Prozent des Endwertes erreicht werden. Beschreiben Sie den Einfluss des Anfangswertes N_0 auf diesen Endwert.

Aufgabe 8: Abi 2006 / AI

Die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers im freien Fall mit turbulenter Luftreibung kann durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden: $\dfrac{c^2}{g} \cdot \dot{v} = c^2 - v^2$.

Dabei ist g die konstante Fallbeschleunigung und c eine Konstante, die von der Masse und der Form der Körpers sowie von der Dichte der Luft abhängt, c und g sind positiv.

a) Bestimmen Sie den Funktionsterm v(t) für $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $v(0) = 0$. Dabei darf vorausgesetzt werden, dass stets gilt: $0 \leq v < c$.

[Ergebnis: $v(t) = c \cdot \dfrac{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} - 1}{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} + 1}$]

b) Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung der Konstanten c.

Aufgabe 9: Abi 2006 / AII

Beim radioaktiven Zerfall von Uran entsteht Helium. Die zeitabhängige Masse m(t) des Heliums zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(0) = 0$ erfüllt die Differentialgleichung
$\dot{m}(t) = \left(\dfrac{4\,m_0}{235} - m(t)\right) \cdot \lambda$.
Dabei ist $\lambda > 0$ die Zerfallskonstante, m_0 ist die Masse des Urans zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\dot{m}(t)$ ist die Ableitung von m(t) nach der Zeit.

a) Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

[Ergebnis: $m(t) = \dfrac{4\,m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)$]

b) Ermitteln Sie das Verhalten von m(t) für $t \to \infty$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für den beschriebenen Zerfallsvorgang?

Aufgabe 10: Abi 2007 / AI

Bei einer chemischen Reaktion vereinigt sich ein Molekül A mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. In einem Laborversuch sind zu Beginn der Reaktion von beiden Molekülarten jeweils M Moleküle vorhanden. Die Umsatzvariable N(t) beschreibt die Anzahl der neuen Moleküle zum Zeitpunkt t mit $t \geq 0$. Für N(t) gilt in guter Näherung die

Differentialgleichung $\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot (M - N(t))^2$, wobei $k > 0$ eine Konstante ist.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der separierbaren Differentialgleichung für $N(0) = 0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{k \cdot M \cdot t + 1}$]

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von k und M, zu welchem Zeitpunkt t^* N(t) 99% des Endwertes erreicht hat.

Aufgabe 11: Abi 2007 / AII

Bei Untersuchungen darüber, wie oft Publikationen zitiert werden, verwendet man zur näherungsweisen Bestimmung den Funktionsterm z(t), der die monatliche Anzahl der Zitate in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) angibt, und den Funktionsterm $\dot{z}(t)$, der die momentane Veränderungsrate angibt.

Dabei stellt man fest, dass gilt: $\dot{z}(t) = \lambda \cdot z(t)$.

Von einer Publikation wird nun über einen größeren Zeitraum die Anzahl der Zitate pro Monat erfasst. Dabei ergibt sich: $z(6) = 950$ und $z(10) = 900$.

Bestimmen Sie z(t), wenn für z(t) obige Differentialgleichung gilt.

Aufgabe 12: Abi 2008 / AI

Werden ein Kondensator der Kapazität C und ein ohmscher Widerstand R in Reihenschaltung an eine Gleichspannungsquelle der Spannung U angeschlossen, ergibt sich die

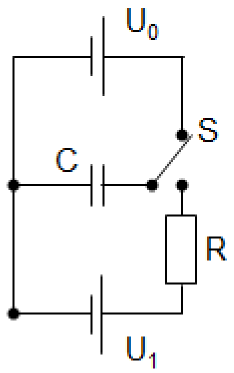
Differentialgleichung: $R \cdot C \cdot \dot{Q}(t) + Q(t) = \frac{C \cdot U}{T} \cdot t$

Mit den physikalischen Konstanten C, R, T und U für die Ladung Q(t) auf dem Kondensator. Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung mithilfe der Variation der Konstanten für $Q(0) = 0$.

Aufgabe 13: Abi 2010 / AI

Für die Geschwindigkeit v(t) eines Körpers unter dem Einfluss einer zeitlich periodisch wirkenden Kraft und einer geschwindigkeitsproportionalen Reibungskraft gilt folgende Differentialgleichung: $\dot{v}(t) + 2 \cdot v(t) = \sin(2t)$.
Der Körper soll zum Zeitpunkt $t = 0$ aus der Ruhe heraus starten.
Ermitteln Sie v(t) mithilfe der Methode der Variation der Konstanten.

<u>Aufgabe 14:</u> Abi 2009 / AI



Ein Kondensator mit der Kapazität C wird an der Gleichspannungsquelle der Spannung U_0 aufgeladen. Für die Beträge U_0 und U_1 der Spannungen gilt: $U_1 < U_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter S umgelegt, sodass sich der Kondensator der Kapazität C über den ohmschen Widerstand R entladen kann. Während des Entladevorgangs gilt für den Betrag $U = U(t)$ der Spannung am Kondensator die Differentialgleichung $\dot{U}(t) = a \cdot (U_1 - U(t))$ mit $\dot{U}(t) = \frac{dU(t)}{dt}$ und $a = \frac{1}{R \cdot C}$.

Berechnen Sie die spezielle Lösung U(t) der obigen Differentialgleichung, falls zum Zeitpunkt $t = 0$ für die Spannung am Kondensator gilt: $U(0) = 3 \cdot U_1$.

<u>Aufgabe 15: Abi 2008 / AII</u>

In der folgenden Aufgabe soll die Differentialgleichung für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz eines radioaktiven Mutter-Tochter-Zerfalls untersucht werden. Von der radioaktiven Muttersubstanz mit der Zerfallskonstanten $\lambda_M > 0$ liegen zur Zeit $t = 0$ N_0 Atome vor. Die ebenfalls radioaktive Tochtersubstanz zerfällt mit der Zerfallskonstanten $\lambda_T > 0$.
Für die Teilchenzahl n(t) der Tochtersubstanz gilt für $t \geq 0$ folgende Differentialgleichung:

$\dot{n}(t) = \lambda_M \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda_M \cdot t} - \lambda_T \cdot n(t)$.

a) Bestimmen Sie die Lösung n(t) für $\lambda_M = \lambda_T = \lambda$ mithilfe der Variation der Konstanten, wenn gilt: $n(0) = 0$.

b) Lösen Sie nun obige Differentialgleichung für n(t) für $\lambda_M \neq \lambda_T$, wenn ebenfalls gilt: $n(0) = 0$

[Ergebnis: $n(t) = \frac{\lambda_M}{\lambda_T - \lambda_M} \cdot N_0 \cdot \left(e^{-\lambda_M \cdot t} - e^{-\lambda_T \cdot t}\right)$]

c) Begründen Sie für den Fall $\lambda_M \neq \lambda_T$ in Abhängigkeit von λ_M und λ_T ohne Verwendung von $\dot{n}(t)$, dass n(t) ein absolutes Maximum besitzt. Berechnen Sie nun den Zeitpunkt t_{max} mithilfe von $\dot{n}(t)$.

<u>Aufgabe 16: Abi 2011 / AI</u>

Ein spezieller Fallschirm gehorcht beim Sinkflug folgender Differentialgleichung:

$v' = \frac{1}{20} \cdot (25 - v^2)$.

Dabei steht v(t) für die Maßzahl der Geschwindigkeit in $\frac{m}{s}$ mit $0 \leq v < 5$ und t für die Maßzahl der Zeit in s mit $t \geq 0$.
Ermitteln Sie die spezielle Lösung dieser Differentialgleichung für $v(0) = 0$.

Aufgabe 17: Abi 2011 / AII

Eine Kugel der Masse m befindet sich in einer Flüssigkeit und wird zum Zeitpunkt t = 0 aus der Ruhe heraus losgelassen. Zum Zeitpunkt $t \geq 0$ hat die Kugel eine Strecke der Länge s(t) durchfallen und besitzt zu diesem Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t) = s'(t)$ sowie die Beschleunigung a(t). Im Folgenden werden zur Vereinfachung nur die Maßzahlen der physikalischen Größen verwendet. Für die Geschwindigkeit v(t) der Kugel gilt die folgende Differentialgleichung: $m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$, wobei g und k weitere physikalische Konstanten sind.

a) Bestimmen Sie v(t) mit der Methode der Variation der Konstanten.

b) Für v(t) einer speziellen Kugel gilt: $v(t) = 19,6 \cdot \left(1 - e^{-0,5 \cdot t}\right)$ für $t \geq 0$.

Zum Zeitpunkt t_1 mit $t_1 \geq 0$ besitzt die Kugel die Beschleunigung $a_1 = v'(t_1)$.

Zeigen Sie, dass die Zeitdauer T_H, in der sich die Beschleunigung a_1 halbiert, unabhängig von t_1 ist und berechnen Sie T_H.

Ermitteln Sie die Streckenlänge, welche die Kugel bis zum Zeitpunkt $t = 2,5$ durchfällt, auf eine Nachkommastelle.

Aufgabe 18: Abi 2013 / AI

Ein 20 cm großer Nadelbaum wird zum Zeitpunkt t = 0 gepflanzt. Das weitere Wachstum des Baumes wird in guter Näherung beschrieben durch die Differentialgleichung

$\dot{x}(t) = 0,0025 \cdot x(t) \cdot (40 - x(t))$ mit $0,2 \leq x < 40$.

Dabei ist $x(t)$ die Höhe des Baumes in Metern in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren.

a) Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung.

[Mögliches Ergebnis: $x(t) = \dfrac{40}{1 + 199 \cdot e^{-0,10t}}$]

b) Berechnen Sie die Höhe, die der Baum auf lange Sicht erreicht, und den Zeitpunkt t^*, in dem der Baum die Hälfte seiner maximalen Höhe erreicht hat. Berechnen Sie $x(t^*)$ geschickt und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

Aufgabe 19: Abi 2014 / AII

Ein Körper wird für $t \geq 0$ durch eine zeitlich konstante Kraft beschleunigt und unterliegt einer zur Geschwindigkeit $v(t)$ proportionalen Reibungskraft. Die Bewegung des Körpers wird dabei durch folgende Differentialgleichung beschrieben: $10 \cdot \dot{v} + v = 40$ mit $\dot{v}(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$.

Die Einheiten für t und v (Sekunde und Meter pro Sekunde) bleiben bei der Rechnung unberücksichtigt.

Bestimmen Sie $v(t)$ für $t \geq 0$ mithilfe der Methode der Variation der Konstanten für die Anfangsbedingung $v(0) = 10$.