Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

- **Mathematik 13 Technik - A I - Aufgabentext**

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der maximalen Definitionsmenge D_{f_a} durch $f_a(x) = \ln\left(\frac{x-1}{a \cdot x^2}\right)$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Ermitteln Sie die Anzahl und die Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die erste Ableitung von f_a und erläutern Sie, welchen Einfluss die Wahl des Parameters a auf den Graphen der Funktion f_a hat.

[Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{2-x}{x \cdot (x-1)}$]

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die maximalen Intervalle, in denen der Graph von f_a streng monoton fällt bzw. steigt, und geben Sie gegebenenfalls Art und Lage des zugehörigen Extrenpunktes an.

Teilaufgabe 1.5 (7 BE)
Nun sei $a = 0.25$. Untersuchen Sie das Verhalten von $f_{0.25}(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to 1$ und geben Sie mit Begründung die Wertemenge dieser Funktion an. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f_{0.25}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $1 < x \leq 5$.
[x-Achse: $1\,LE = 1\,cm$; y-Achse: $1\,LE = 5\,cm$;]

Teilaufgabe 1.6.0
Gegeben ist weiter die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_2^x \ln\left(\frac{t-1}{0.25 \cdot t^2}\right) dt$ und der Definitionsmenge $D_F =]\,1\,;\,\infty\,[$.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)
Geben Sie, ohne die Integration durchzuführen, Anzahl und Lage der Nullstellen, eventuelle Extremstellen und Wendestellen des Graphen von F an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

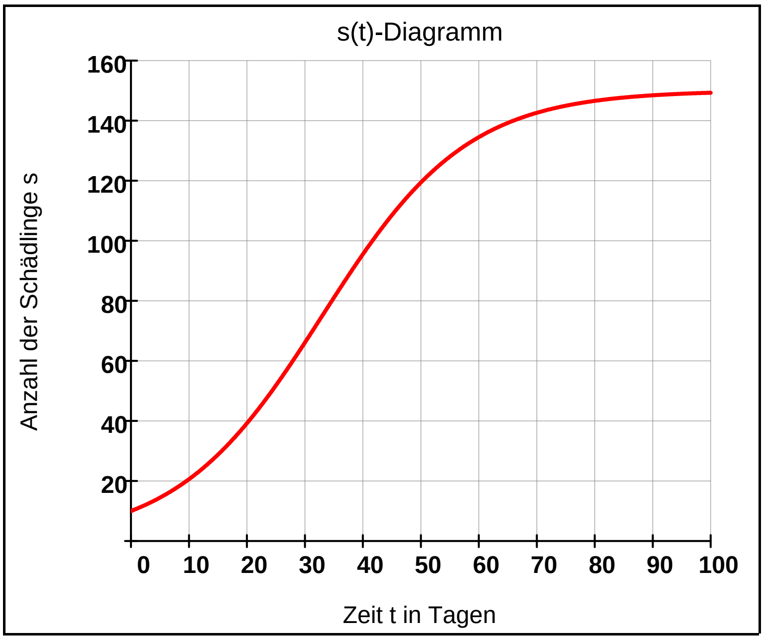
Teilaufgabe 1.6.2 (4 BE)
Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$.

Teilaufgabe 1.7 **(4 BE)**
Begründen Sie, dass die Funktion $f_{0.25}$ im Intervall $[\,2\,;\,\infty\,[$ umkehrbar ist. Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(\ln(0.75)\,/\,4)$, ohne den Term der Umkehrfunktion zu bestimmen.

Teilaufgabe 2 **(10 BE)**
Bestimmen Sie für $y > 2$ die Lösungen der separierbaren Differentialgleichung

$$2 \cdot y' \cdot \left(x^4 + 16\right) + 6 \cdot x \cdot y = 3 \cdot x \cdot y^2,\ x \in \mathbb{R} \text{ so, dass gilt: } y(0) = 4.$$

Teilaufgabe 3.0
Bei einem biologischen Experiment wurde die Vermehrung von Schädlingen unter bestimmten Voraussetzungen untersucht.
Die grafische Auswertung der Versuchsdaten ergaben folgendes Diagramm:



Man vermutet, dass die Vermehrung durch folgendes Wachstumsgesetz beschrieben werden kann:

$$s(t) = \frac{150}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}}$$

s: Anzahl der Schädlinge auf der Beobachtungsfläche
t: Zeit in Tagen
a, b $\in \mathbb{R}$ Parameterwerte

Teilaufgabe 3.1 **(4 BE)**
Bestimmen Sie die Parameterwerte mit Hilfe der grafischen Darstellung und überprüfen Sie das Gesetz an einem weiteren Messwert.
[Mögliches Ergebnis: $a = 0.14$; $b = 0.08$]

Teilaufgabe 3.2 **(8 BE)**
Berechnen Sie die Vermehrungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Vermehrungsgeschwindigkeit maximal ist.