Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der maximalen Definitions-

menge D_{f_a} durch $f_a(x) = \ln\left(\frac{x-1}{a \cdot x^2}\right)$.

Teilaufgabe 1.1 **(4 BE)**
Bestimmen Sie D_{f_a} in Abhängigkeit von a.

$a > 0 \qquad \frac{x-1}{a \cdot x^2} > 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a > 0 \end{array} \rightarrow 1 < x \qquad D_{f_a} =]\,1\,;\,\infty\,[$

$a < 0 \qquad \frac{x-1}{a \cdot x^2} > 0 \;\Big|\; \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, a < 0 \end{array} \rightarrow x < 0 \vee 0 < x < 1 \qquad D_{f_a} =]\,-\infty\,;\,0\,[\; \cup\;]\,0\,;\,1\,[$

Teilaufgabe 1.2 **(4 BE)**
Ermitteln Sie die Anzahl und die Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{a \cdot x^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = a \cdot x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad a \cdot x^2 - x + 1 = 0 \;\; \text{auflösen}, x \;\rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\frac{\sqrt{1-4 \cdot a}}{2} + \frac{1}{2}}{a} \\ -\dfrac{\frac{\sqrt{1-4 \cdot a}}{2} - \frac{1}{2}}{a} \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $\quad D(a) := 1 - 4 \cdot a$

$$D(a) > 0 \;\; \text{auflösen}, a \;\rightarrow a < \frac{1}{4}$$

$a < \frac{1}{4} \wedge a \neq 0 \qquad$ zwei einf. Nullstellen: $\qquad x_1(a) := \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \cdot a}}{2 \cdot a} \qquad x_2(a) := \frac{1 - \sqrt{1 - 4 \cdot a}}{2 \cdot a}$

$a = \frac{1}{4}$ eine zweifache Nullstelle: $x_{12} := 2$

$a > \frac{1}{4}$ keine Nullstellen

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die erste Ableitung von f_a und erläutern Sie, welchen Einfluss die Wahl des Parameters a auf den Graphen der Funktion f_a hat.

[Teilergebnis: $f'_a(x) = \frac{2-x}{x\cdot(x-1)}$]

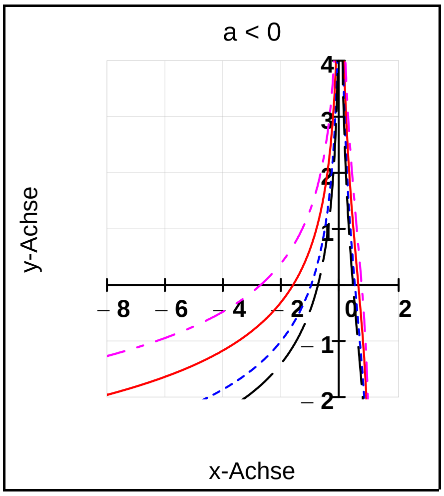
Mathcad:

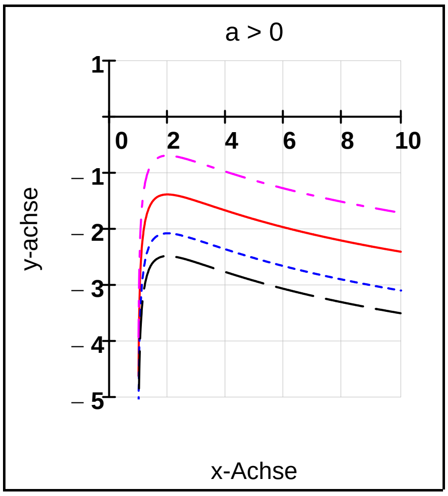
$$f(x,a) := \ln\left(\frac{x-1}{a\cdot x^2}\right) \qquad f'(x,a) := \frac{d}{dx}f(x,a) = -\frac{x-2}{x\cdot(x-1)}$$

$$f'(x,a) = \frac{a\cdot x^2}{x-1}\cdot\frac{1\cdot a\cdot x^2 - (x-1)\cdot 2\cdot a\cdot x}{a^2\cdot x^4} = \frac{1}{x-1}\cdot\frac{a\cdot x^2 - 2\cdot a\cdot x^2 + 2\cdot a\cdot x}{a\cdot x^2} = \frac{-a\cdot x^2 + 2\cdot a\cdot x}{(x-1)\cdot a\cdot x^2}$$

$$f'(x,a) = \frac{a\cdot x\cdot(-x+2)}{(x-1)\cdot a\cdot x^2} = \frac{2-x}{(x-1)\cdot x}$$

Die Graphen von f_a haben alle die gleiche form und sind gegeneinander parallel zur y-Achse verschoben.





Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die maximalen Intervalle, in denen der Graph von f_a streng monoton fällt bzw. steigt, und geben Sie gegebenenfalls Art und Lage des zugehörigen Extrempunktes an.

$f'(x, a) \rightarrow -\dfrac{x-2}{x\cdot(x-1)}$ $\qquad$ $f'(x) = \dfrac{2-x}{x\cdot(x-1)}$

$a > 0$ $\qquad$ $D_{f_a} =]\,1\,;\ \infty\,[$

		$x \neq 1$		$x = 2$	
Zähler			pos		neg
Nenner			pos		pos
f '(x)			pos		neg
G_f	n.d.		sms	HP	smf

G_f ist streng monoton steigend in **] 1 ; 2]** und streng monoton fallend in **[2 ; ∞ [**.

$f(2, a) = \ln\left(\dfrac{1}{4\cdot a}\right)$ $\qquad$ Hochpunkt: **HP(2 / $\ln\left(\dfrac{1}{4\cdot a}\right)$)**

$a < 0$ $\qquad$ $D_{f_a} =]\,-\infty\,;\ 0\,[\ \cup\ ]\,0\,;\,1\,[$ $\qquad$ $x\cdot(x-1) > 0$ auflösen, $x \ \rightarrow x < 0 \vee 1 < x$

		$x \neq 0$		$x \neq 1$	
Zähler	pos		pos		
Nenner	pos		neg		
f '(x)	pos		neg		
G_f	sms	Polstelle	smf		n.d.

G_f ist
streng monoton fallend in **] $-\infty$; 0 [**
und
streng monoton fallend in **] 0 ; 1 [**.

Es gibt keinen Extrempunkt.

Teilaufgabe 1.5 **(7 BE)**

Nun sei $\mathbf{a = 0.25}$. Untersuchen Sie das Verhalten von $f_{0.25}(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to 1$ und geben Sie mit Begründung die Wertemenge dieser Funktion an. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f_{0.25}$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse für $1 < x \le 5$.

[x-Achse: $1\,\mathrm{LE} = 1\,\mathrm{cm}$; y-Achse: $1\,\mathrm{LE} = 5\,\mathrm{cm}$;]

$$f(x) := \ln\left(\frac{x-1}{0.25\cdot x^2}\right) \qquad D_f =]\,1\,;\,\infty\,[$$

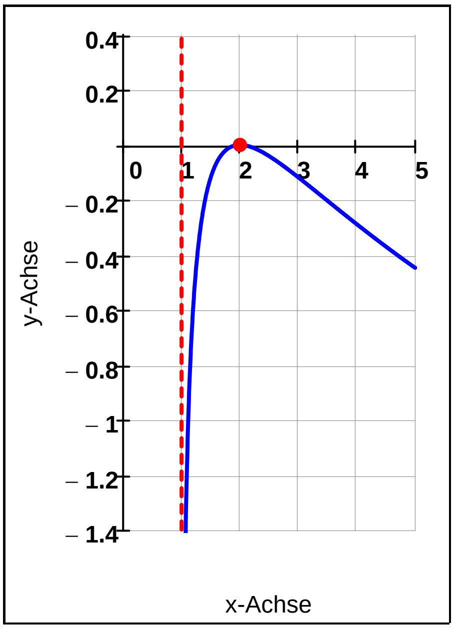
$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x-1}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{0.25\cdot x^2}}\right) \overset{\text{L.H.}}{=} \lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{1}{0.5\cdot x}\right)_{\underset{0}{\downarrow}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-1}{\frac{1}{4}\cdot x^2} \to 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 1^+} \ln\left(\frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{x-1}}{\underset{\underset{0.25}{\downarrow}}{\frac{1}{4}\cdot x^2}}\right) \to -\infty$$

$$\ln\left(\frac{1}{4\cdot\frac{1}{4}}\right) \to 0$$

HP(2 / 0) nur ein Hochpunkt und Grenzwerte: $W =]\,-\infty\,;\,0\,[$

x_d =	$f(x_d)$ =
1.5	-0.12
2	0.00
2.5	-0.04
3	-0.12
3.5	-0.20
4	-0.29
4.5	-0.37
5	-0.45



Teilaufgabe 1.6.0

Gegeben ist weiter die Integralfunktion F mit $F(x) = \int_2^x \ln\left(\frac{t-1}{0.25 \cdot t^2}\right) dt$ und der Definitionsmenge

$D_F =]\,1\,;\,\infty\,[$.

Teilaufgabe 1.6.1 (4 BE)
Geben Sie, ohne die Integration durchzuführen, Anzahl und Lage der Nullstellen, eventuelle Extremstellen und Wendestellen des Graphen von F an. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

$F(2) = \int_2^2 \ln\left(\frac{t-1}{0.25 \cdot t^2}\right) dt = 0$ $\Rightarrow$ $x = 2$ ist eine Nullstelle von F.

$F'(x) = f(x) = \ln\left(\frac{t-1}{0.25 \cdot t^2}\right)$

$F'(x) < 0$ für $x \in]\,1\,;\,\infty\,[\setminus \{2\}$ $\Rightarrow$ G_F ist im Intervall $]\,1\,;\,\infty\,[$ streng monoton fallend

G_F besitzt keinen Extrempunkt und $x = 2$ ist die einzige Nullstelle von F.

$F''(x) = f'(x)$ $\Rightarrow$ G_f besitzt einen Wendepunkt an der Stelle $x = 2$.

Wegen $F(2) = 0$ und $F'(2) = f(2) = 0$ ist der Punkt (2/0) Terrassenpunkt von G_F

Teilaufgabe 1.6.2 (4 BE)
Bestimmen Sie eine integralfreie Darstellung von $F(x)$.

$$J(x) = \int \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) dx$$

$u(x) := \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right)$ $\qquad$ $u'(x) := \frac{2-x}{x \cdot (x-1)}$

$v'(x) = 1$ $\qquad$ $v(x) = x$

$$J(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) - \int \frac{2-x}{x-1} dx$$

Nebenrechung:

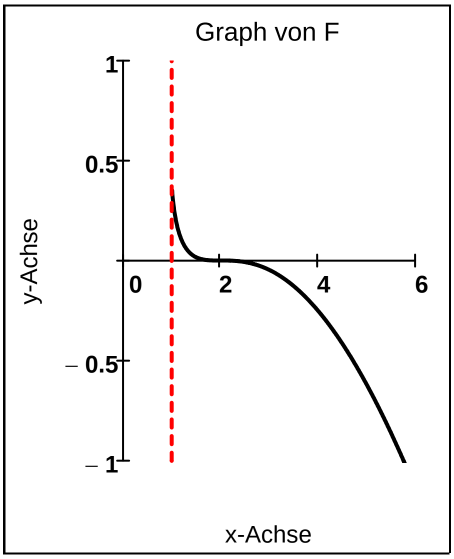
$$\frac{2-x}{x-1} \text{ parfrac}, x \rightarrow \frac{1}{x-1} - 1 \qquad \Rightarrow \qquad J(x) = \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) - \int \left(\frac{1}{x-1} - 1\right) dx$$

$$J(t) = t \cdot \ln\left(\frac{t-1}{0.25 \cdot t^2}\right) - \ln(|t-1|) + t$$

$$F(x) = J(x) - J(2) = x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) - \ln(|x-1|) + x - \left(2 \cdot \ln\left(\frac{2-1}{0.25 \cdot 2^2}\right) - \ln(|2-1|) + 2\right)$$

$$F(x) = x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) - \ln(x-1) + x - (2 \cdot \ln(1) - \ln(1) + 2)$$

$$F(x) := x \cdot \ln\left(\frac{x-1}{0.25 \cdot x^2}\right) - \ln(x-1) + x - 2$$



Teilaufgabe 1.7 (4 BE)
Begründen Sie, dass die Funktion $f_{0.25}$ im Intervall $[\,2\,;\,\infty\,[$ umkehrbar ist. Geben Sie die Definitions- und Wertemenge der zugehörigen Umkehrfunktion g an. Ermitteln Sie die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(\ln(0.75)\,/\,4)$, ohne den Term der Umkehrfunktion zu bestimmen.

Der Graph von f ist im Intervall $[\,2\,;\,\infty\,[$ streng monoton fallend.

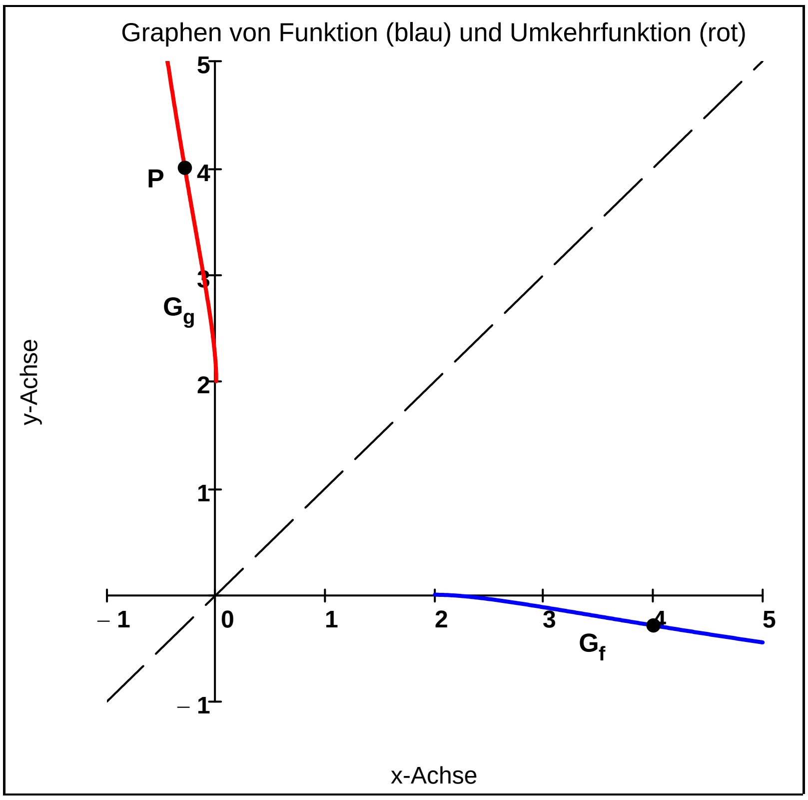
$D_f = [\,2\,;\,\infty\,[$ $\qquad$ $W_f = [\,-\infty\,;\,0\,]$

Umkehrfunktion g:

$D_g = [\,-\infty\,;\,0\,]$ $\qquad$ $W_g = [\,2\,;\,\infty\,[$

Steigung der Umkehrfunktion: $\quad m_u = \dfrac{1}{f'(4)} = \dfrac{1}{\dfrac{2-4}{4\cdot(4-1)}} = \dfrac{12}{-2} = -6$

Die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt $P(\ln(0.75)\,/\,4)$ beträgt -6.



Teilaufgabe 2 (10 BE)
Bestimmen Sie für $y > 2$ die Lösungen der separierbaren Differentialgleichung

$$2\cdot y'\cdot\left(x^4+16\right)+6\cdot x\cdot y=3\cdot x\cdot y^2,\ x\in\mathbb{R} \text{ so, dass gilt: } y(0)=4.$$

$$2\cdot y'\cdot\left(x^4+16\right)+6\cdot x\cdot y=3\cdot x\cdot y^2 \text{ auflösen}, y' \rightarrow \frac{3\cdot x\cdot y^2-6\cdot x\cdot y}{2\cdot x^4+32} \text{ Faktor } \rightarrow \frac{3\cdot x\cdot y\cdot(y-2)}{2\cdot\left(x^4+16\right)}$$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen: $$\frac{y'}{y\cdot(y-2)}=\frac{3\cdot x}{2\cdot\left(x^4+16\right)}$$

$$\int\frac{1}{y\cdot(y-2)}\,dy=\int\frac{3\cdot x}{2\cdot\left(x^4+16\right)}\,dx \qquad (*)$$

Nebenrechnungen 1:

$$\frac{1}{y\cdot(y-2)}=\frac{A}{y}+\frac{B}{y-2}=\frac{A\cdot(y-2)+B\cdot y}{y\cdot(y-2)}=\frac{(A+B)\cdot y-2\cdot A}{y\cdot(y-2)}$$

Koeffizientenvergleich:

$A + B = 0$

$$-2\cdot A=1 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{-1}{2} \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{2}$$

$$\int\frac{1}{y\cdot(y-2)}\,dy=\frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{-1}{y}+\frac{1}{y-2}\right)dy=\frac{-1}{2}\cdot\ln(y)+\frac{1}{2}\cdot\ln(y-2)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{y-2}{y}\right)$$

Betrag weglassen, da y > 2

Nebenrechnungen 2:

$$\int\frac{3\cdot x}{2\cdot\left(x^4+16\right)}\,dx=\int\frac{3}{4\cdot\left(z^2+16\right)}\,dz=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\arctan\left(\frac{z}{4}\right)=\frac{3}{16}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

Subst: $x^2 = z \qquad \frac{dz}{dx}=2\cdot x \qquad\Rightarrow\qquad dx=\frac{dz}{2\cdot x}$

Einsetzen in **(*)**:

$$\frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{y-2}{y}\right)=\frac{3}{16}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)+\frac{k}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\ln\left(\frac{y-2}{y}\right)=\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)+k$$

Delogarithmieren :

$$\frac{y-2}{y}=e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)+k}=K\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}$$

Auflösen nach y:

$$y-2=y\cdot K\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}$$

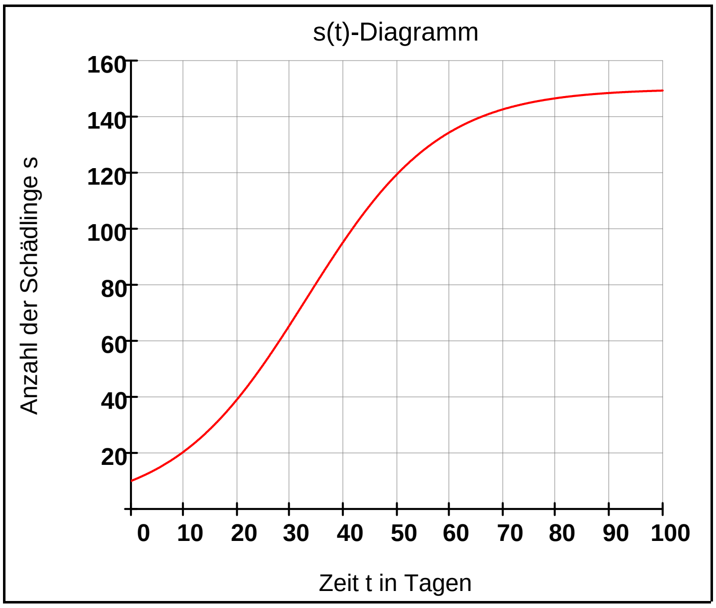
$$\left(1-K\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}\right)\cdot y=2\quad\Rightarrow\quad y=\frac{2}{\left(1-K\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}\right)}$$

Allgemeine Lösung: $$y_A(x,K):=\frac{2}{\left(1-K\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\operatorname{atan}\left(\frac{x^2}{4}\right)}\right)}$$

Anfangsbedingung einsetzen: $$y_A(0,K)=4\ \text{auflösen}, K\ \rightarrow\frac{1}{2}$$

Spezielle Lösung: $$y_S(x)=\frac{2}{1-\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{3}{8}\cdot\arctan\left(\frac{x^2}{4}\right)}}$$

Teilaufgabe 3.0
Bei einem biologischen Experiment wurde die Vermehrung von Schädlingen unter bestimmten Voraussetzungen untersucht.
Die grafische Auswertung der Versuchsdaten ergaben folgendes Diagramm:



Man vermutet, dass die Vermehrung durch folgendes Wachstumsgesetz beschrieben werden kann:

$$s(t) = \frac{150}{1 + a \cdot e^{-b \cdot t}}$$

s: Anzahl der Schädlinge auf der Beobachtungsfläche
t: Zeit in Tagen
a, b $\in$ **IR** Parameterwerte

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Parameterwerte mit Hilfe der grafischen Darstellung und überprüfen Sie das Gesetz an einem weiteren Messwert.
[Mögliches Ergebnis: **a = 0.14** ; **b = 0.08**]

$$s(0) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{150}{1 + a \cdot e^{0}} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad 15 = 1 + a \quad \Leftrightarrow \quad a = 15 - 1 = 14$$

$$s(50) = 200 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{150}{1 + a \cdot e^{-b \cdot 50}} = 120 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + a \cdot e^{-b \cdot 50} = \frac{150}{120} \quad \Leftrightarrow$$

a einsetzen: $\quad 14 \cdot e^{-50 \cdot b} = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4} \qquad -50 \cdot b = \ln\left(\frac{1}{4 \cdot 14}\right)$

$$b := \frac{-1}{50} \cdot \ln\left(\frac{1}{56}\right) = 0.081$$

$$s(t) := \frac{150}{1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}}$$

Weiterer Messwert im Diagramm: $s(10) = 20$

Funktionswert: $s(10) = 20.6$

Teilaufgabe 3.2 (8 BE)
Berechnen Sie die Vermehrungsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ und bestimmen Sie, zu welchem Zeitpunkt die Vermehrungsgeschwindigkeit maximal ist.

Vermehrungsgeschwindigkeit entspricht der Ableitungsfunktion:

$$s'(t) := \frac{-150}{\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^2} \cdot 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot (-0.08) \qquad s'(t) := 168 \cdot \frac{e^{\frac{-8}{100} \cdot t}}{\left(1 + 14 \cdot e^{\frac{-8}{100} \cdot t}\right)^2}$$

$s'(0) = 0.747$

Die größte Tangentensteigung entspricht der Nullstelle der 2. Ableitungsfunktion:

$$s''(t) = 168 \cdot \frac{-0.08 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot \left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^2 - e^{-0.08 \cdot t} \cdot 2 \cdot \left[\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right) \cdot 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot (-0.08)\right]}{\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^4}$$

$$s''(t) = 168 \cdot \frac{(-0.08) \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot \left(1 + 14 e^{-0.08 \cdot t}\right) + 28 \cdot 0.08 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot e^{-0.08 \cdot t}}{\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^3}$$

$$s''(t) = \frac{168 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot 0.08}{\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^3} \cdot \left[-\left(1 + 14 e^{-0.08 \cdot t}\right) + 28 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right]$$

$$s''(t) = \frac{168 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \cdot 0.08}{\left(1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)^3} \cdot \left(-1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t}\right)$$

$$s''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + 14 \cdot e^{-0.08 \cdot t} \quad \Leftrightarrow \quad -0.08 \cdot t = \frac{1}{14} \quad \Leftrightarrow \quad t := \frac{1}{-0.08} \cdot \ln\left(\frac{1}{14}\right) \qquad \boxed{t = 33}$$

einfache Nullstelle, also Wendestelle.