Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

• Mathematik 13 Technik - A II - Aufgabentext

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in IR \setminus \{0\}$ und der Definitionsmenge

$D_{f_a} = IR$ durch $f_a(x) = a \cdot e^{-(x+a)} \cdot (x + a + 1)$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f_a oberhalb der x-Achse verläuft und untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion f_a für $|x| \to \infty$.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten und Art des Extrempunktes des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.

[Teilergebnis: $f'_a(x) = -a \cdot e^{-(x+a)} \cdot (x + a)$]

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)
Stellen Sie in Abhängigkeit von a die Wendetangente für den Graphen von f_a auf und bestimmen Sie den Parameter a derart, dass diese Wendetangente durch den Punkt **P(1/0)** geht.
[Teilergebnis: $x_W = 1 - a$]

Teilaufgabe 2.0
Nun sei $a = 2$ und damit die Funktion f_2 gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 und die zugehörige Wendetangente unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem für $-3.5 \le x \le 3.5$.
Hinweis: $1\,LE = 2\,cm$; Koordinatenursprung in Blattmitte;

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Der Graph von f_2, die Wendetangete und die positive x-Achse begrenzen eine Fläche, die sich nach rechts in Unendliche erstreckt. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

Teilaufgabe 3.0
Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) = \arctan\left(f_2(x)\right)$ mit $D_g = IR$, wobei f_2 die Funktion aus Aufgabe 2 ist.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse und bestimmen Sie das Verhalten von $g(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$. Geben Sie jeweils die Gleichung der zugehörigen Asymptote des Graphen von g an.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Untersuchen Sie das Montonieverhalten des Graphen der Funktion g. Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes.

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Zeichnen Sie in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.1 den Graphen der Funktion g einschließlich der Asymptoten für $-3.5 \le x \le 3.5$ ($1\,LE = 2\,cm$).

Teilaufgabe 3.4 (4 BE)
Der Graph von g schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 1$ ein Flächenstück mit der Maßzahl B ein. Schätzen Sie B durch Berechnung der Ober- und Untersumme mit $\Delta x = 0.5$ ab. (Genauigkeit: 2 Dezimalen).

Teilaufgabe 3.5 (7 BE)
Die Funktion h ist gegeben durch die Vorschrift:

$$h(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{if } x \ge -3 \\ g(x) & \text{if } x < -3 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Stelle $x = -3$ stetig ist und untersuchen Sie weiterhin, ob die Funktion h dann auch an dieser Stelle differenzierbar ist.

[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{-2 \cdot e^{x+2} \cdot (x+2)}{e^{2 \cdot x + 4} + 4 \cdot (x+3)^2}$]

Teilaufgabe 4 (9 BE)
Schließt man eine reale Spule zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannung mit $U = U_0$ an, dann gilt für die Stromstärke $J(t)$ die Differentialgleichung $U_0 - L \cdot J'(t) - R \cdot J(t) = 0$, wobei U_0, R und L konstante Größen sind und $J'(t)$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist. Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differentialgleichung für die Stromstärke $J(t)$ für die Anfangsbedingung $J(0) = 0$.