Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der Definitionsmenge

$D_{f_a} = \mathbb{R}$ durch $f_a(x) = a\cdot e^{-(x+a)}\cdot(x+a+1)$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f_a oberhalb der x-Achse verläuft und untersuchen Sie das Grenzverhalten der Funktion f_a für $|x| \to \infty$.

$$f(x,a) := a\cdot e^{-(x+a)}\cdot(x+a+1)$$

$$f_a(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0 \;\text{ und }\; x+a+1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -a-1$$

$$f_a(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0 \;\text{ und }\; x+a+1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -a-1$$

$a > 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left[a\cdot\underset{\underset{0}{\downarrow}}{e^{-(x+a)}}\cdot\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{(x+a+1)}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{a\cdot\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{(x+a+1)}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{x+a}}}\right] \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \frac{a}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{x+a}}} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[a\cdot\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{-(x+a)}}\cdot\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{(x+a+1)}\right] \quad \text{annehmen}, a > 0 \;\to -\infty$$

$a < 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[a\cdot\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{-(x+a)}}\cdot\underset{\underset{-\infty}{\downarrow}}{(x+a+1)}\right] \quad \text{annehmen}, a < 0 \;\to \infty$$

L'Hosp.

$$\lim_{x \to \infty} \left[a \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{-(x+a)}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{(x + a + 1)} \right] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{\overset{\substack{\infty \\ \uparrow}}{a \cdot (x + a + 1)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{e^{x+a}}} \right] = \frac{a}{\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{e^{x+a}}} = 0$$

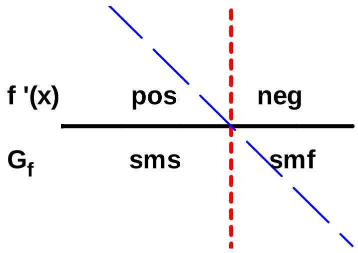
Teilaufgabe 1.2 **(4 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten und Art des Extrempunktes des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.
[Teilergebnis: $f'_a(x) = -a \cdot e^{-(x+a)} \cdot (x + a)$]

$$f'_a(x) = a \cdot \left[-e^{-(x+a)} \cdot (x + a + 1) + e^{-(x+a)} \cdot 1 \right] = -a \cdot (x + a) \cdot e^{-(x+a)}$$

$f'_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -a \qquad f(-a, a) = a$

Das Vorzeichen von f '(x) entscheidet der Term $-a \cdot (x + a)$:

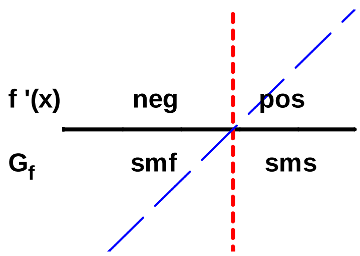
$a > 0 \qquad x = -a$



Extrempunkt ist Hochpunkt.

H(−a / a)

$a > 0 \qquad x = -a$



Extrempunkt ist Tiefpunkt.

T(−a / a)

Teilaufgabe 1.3 **(7 BE)**
Stellen Sie in Abhängigkeit von a die Wendetangente für den Graphen von f_a auf und bestimmen Sie den Parameter a derart, dass diese Wendetangente durch den Punkt **P(1/0)** geht.
[Teilergebnis: $x_W = 1 - a$]

$$f''_a(x) = -a \cdot \left[-e^{-(x+a)} \cdot (x + a) + e^{-(x+a)} \cdot 1 \right] = -a \cdot (-x - a + 1) \cdot e^{-(x+a)} = a \cdot (x + a - 1) \cdot e^{-(x+a)}$$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + a - 1 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 1 - a$ Wendest., da Nullst. mit VZW

$f(1-a,a) = 2\cdot a\cdot e^{-1}$ Wendepunkt: $W(\ 1-a\ /\ 2\cdot a\cdot e^{-1}\ )$ -1

Steigung: $f'(1-a,a) \rightarrow -a\cdot e^{-1}$

Wendetangente: $t(x,a) := \frac{-a}{e}\cdot(x-1+a) + \frac{2\cdot a}{e}$ $t(x) = \frac{-a}{e}\cdot(x+a-3)$

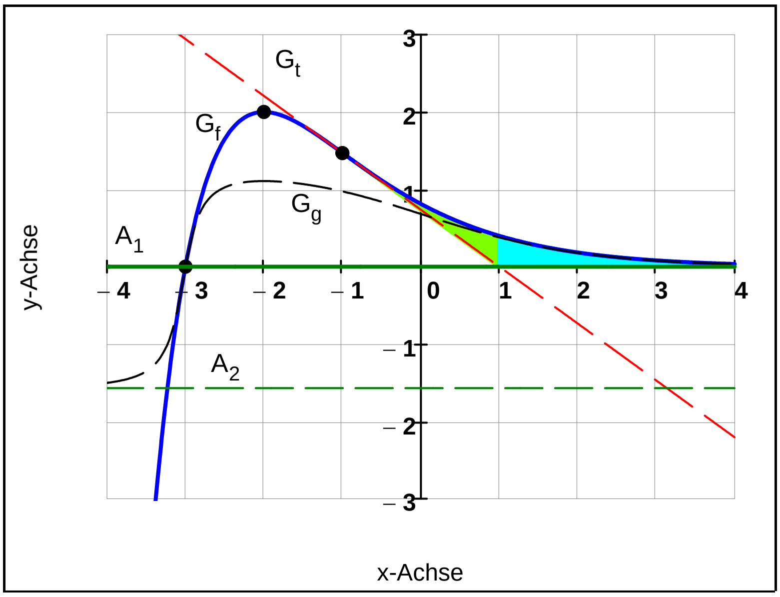
P einsetzen: $t(1,a) = 0 \rightarrow 2\cdot a\cdot e^{-1} - a^2\cdot e^{-1} = 0$ auflösen, a $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ keine Lösung / Lösung

Teilaufgabe 2.0
Nun sei $a = 2$ und damit die Funktion f_2 gegeben.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_2 und die zugehörige Wendetangente unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem für $-3.5 \le x \le 3.5$.
Hinweis: $1\ \text{LE} = 2\ \text{cm}$; Koordinatenursprung in Blattmitte;

Nullstelle: $x_0 = -3$ Hochpunkt: $H(-2\ /\ 2)$ Wendepunkt: $W(-1\ /\ 1.47)$

Wendetangente: $t(x,2) = 2\cdot e^{-1} - 2\cdot x\cdot e^{-1}$



$x_d := -3.5, -3 .. 3.5$

$x_d =$	$f(x_d, 2) =$
-3.5	-4.48
-3	0
-2.5	1.65
-2	2
-1.5	1.82
-1	1.47
-0.5	1.12
0	0.81
0.5	0.57
1	0.4
1.5	0.27
2	0.18
2.5	0.12
3	0.08
3.5	0.05

Teilaufgabe 2.2 (7 BE)
Der Graph von f_2 , die Wendetangete und die positive x-Achse begrenzen eine Fläche, die sich nach rechts in Unendliche erstreckt. Berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche.

$$A = \lim_{b \to \infty} \int_{-1}^{b} f(x)\, dx \; - A_{\Delta}$$

Nebenrechnungen:

$$\int (f(x))\, dx = \int \left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right] dx$$

$$u(x) = x + 3 \qquad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x-2} \qquad v(x) = -e^{-x-2}$$

$$\blacksquare = -2 \cdot (x+3) \cdot e^{-x-2} - 2 \cdot \int -e^{-x-2}\, dx = -2 \cdot (x+3) \cdot e^{-x-2} + 2 \cdot \left(-e^{-x-2}\right)$$

$$\blacksquare = 2 \cdot (-x - 3 - 1) \cdot e^{-x-2} = (-2 \cdot x - 8) \cdot e^{-x-2}$$

Dreiecksfläche: $\quad A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_P - x_P\right) \cdot f\left(x_W\right) = \frac{1}{2} \cdot (1+1) \cdot \frac{4}{e} = \frac{4}{e}$

$$A = \lim_{b \to \infty} \left[\left[(-2 \cdot b - 8) \cdot e^{-b-2}\right] - \left[(2-8) \cdot e^{1-2}\right]\right] - \frac{1}{e}$$

$$A = \lim_{b \to \infty} \left[\left[\frac{\overset{-\infty}{\overset{\uparrow}{-2 \cdot (b+3)}}}{\underset{\overset{\downarrow}{\infty}}{e^{b+2}}} + \underset{\overset{\downarrow}{0}}{2 \cdot \left(-e^{-b-2}\right)}\right] - \left(\frac{-4}{e} - \frac{2}{e}\right)\right] - \frac{4}{e}$$

$$A = \lim_{b \to \infty} \left[\left(\frac{-2}{e^{b+2}}\right)_{\overset{\downarrow}{0}} - \left(\frac{-4}{e} - \frac{2}{e}\right)\right] - \frac{4}{e} = \frac{6}{e} - \frac{4}{e} = \frac{2}{e}$$

Teilaufgabe 3.0
Gegeben ist nun die Funktion g mit $g(x) = \arctan\left(f_2(x)\right)$ mit $D_g = IR$, wobei f_2 die Funktion aus Aufgabe 2 ist.

Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Koordinaten des Schnittpunktes mit der x-Achse und bestimmen Sie das Verhalten von $g(x)$ für $|x| \rightarrow \infty$. Geben Sie jeweils die Gleichung der zugehörigen Asymptote des Graphen von g an.

$$g(x) = \arctan\left(f_2(x)\right) = \arctan\left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right]$$

$g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \qquad x_0 = -3$

Schnittpunkt mit x-Achse: **N(−3 / 0)**

$$\lim_{x \to \infty} g(x) \overset{\text{nach 1.1}}{=} g(0) = 0 \qquad \text{Asymptote } A_1\text{:} \quad y = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) \overset{\text{nach 1.1}}{=} g(-\infty) = \frac{-\pi}{2} \qquad \text{Asymptote } A_2\text{:} \quad y = \frac{-\pi}{2}$$

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion g. Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten des Extrempunktes.

$$g'(x) = \frac{1}{1 + f(x)^2} \cdot f'(x)$$

Da $\dfrac{1}{1 + f(x)^2} > 0$ für alle x, haben $g'(x)$ und $f'(x)$ das gleiche Monotonieverhalten.

G_g ist streng monoton steigend in $]-\infty\,;\,-2]$ und streng monoton fallend in $[-2\,;\,\infty[$.

$$g(-2) = \arctan\left[2 \cdot e^0 \cdot (-2+3)\right] = \arctan(2) \approx 1{,}11$$

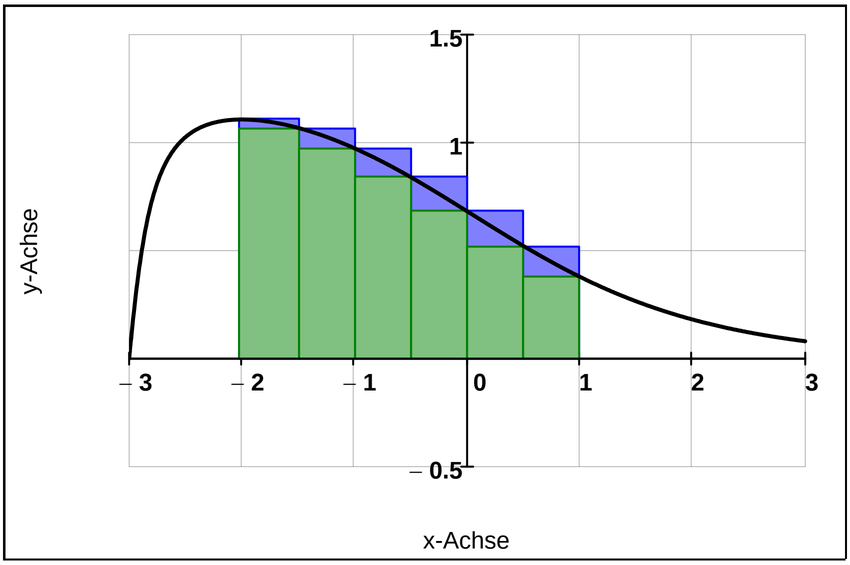
Hochpunkt: **H(−2 / arctan(2))**

Teilaufgabe 3.3 (4 BE)
Zeichnen Sie in das Koordinatensystem der Teilaufgabe 2.1 den Graphen der Funktion g einschließlich der Asymptoten für $-3.5 \le x \le 3.5$ ($1\ \text{LE} = 2\ \text{cm}$).

$$g(x) := \operatorname{atan}(f(x,2)) \rightarrow \operatorname{atan}\left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right]$$

siehe 2.1

Teilaufgabe 3.4 (4 BE)
Der Graph von g schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = -2$ und $x = 1$ ein Flächenstück mit der Maßzahl B ein. Schätzen Sie B durch Berechnung der Ober- und Untersumme mit $\Delta x = 0.5$ ab. (Genauigkeit: 2 Dezimalen).



$x_d := -2, -1.5 .. 1$

$x_d =$	$g(x_d) =$
-2	1.107
-1.5	1.068
-1	0.974
-0.5	0.84
0	0.682
0.5	0.522
1	0.379

Untersumme, jeweils rechte Intervallgrenze:

$$S_u := 0.5 \cdot (g(-1.5) + g(-1) + g(-0.5) + g(0) + g(0.5) + g(1))$$

$$S_u := 0.5 \cdot (1.068 + 0.974 + 0.840 + 0.682 + 0.522 + 0.379) \qquad S_u = 2.232$$

Obersumme, jeweils linke Intervallgrenze:

$$S_o := 0.5 \cdot (g(-2) + g(-1.5) + g(-1) + g(-0.5) + g(0) + g(0.5))$$

$$S_o := 0.5 \cdot (1.107 + 1.068 + 0.974 + 0.840 + 0.682 + 0.522) \qquad S_o = 2.597$$

$$A := \frac{1}{2} \cdot \left(S_u + S_o\right) = 2.41$$

Teilaufgabe 3.5 (7 BE)BE)
Die Funktion h ist gegeben durch die Vorschrift:

$$h(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{if } x \geq -3 \\ g(x) & \text{if } x < -3 \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion h an der Stelle $x = -3$ stetig ist und untersuchen Sie weiterhin, ob die Funktion h dann auch an dieser Stelle differenzierbar ist.

[Teilergebnis: $g'(x) = \dfrac{-2 \cdot e^{x+2} \cdot (x+2)}{e^{2 \cdot x + 4} + 4 \cdot (x+3)^2}$]

Stetigkeit:

$$\lim_{x \to -3^+} \left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right] \to 0$$

$$\lim_{x \to -3^-} \operatorname{atan}\left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right] \to 0$$

$\Rightarrow$ Stetig an der Stelle $x_0 = -3$

$f(-3, 2) = 0$

Ableitungsfunktion

$$h'(x) = \begin{cases} -2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+2) & \text{if } x > -3 \\ \dfrac{1}{1 + f(x)^2} \cdot f'(x) & \text{if } x < -3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -3^+} \left[-2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+2)\right] \to 2 \cdot e$$

$$\lim_{x \to -3^-} \left[\frac{1}{1 + \left[2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+3)\right]^2} \cdot \left[-2 \cdot e^{-x-2} \cdot (x+2)\right]\right] \to 2 \cdot e$$

$\Rightarrow$ differenzierbar an der Stelle $x_0 = -3$

Teilaufgabe 4 (9 BE)
Schließt man eine reale Spule zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 0}$ an eine Gleichspannung mit $\mathbf{U = U_0}$ an, dann gilt für die Stromstärke $\mathbf{J(t)}$ die Differentialgleichung $\mathbf{U_0 - L \cdot J'(t) - R \cdot J(t) = 0}$, wobei $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{R}$ und $\mathbf{L}$ konstante Größen sind und $\mathbf{J'(t)}$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist. Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differentialgleichung für die Stromstärke $\mathbf{J(t)}$ für die Anfangsbedingung $\mathbf{J(0) = 0}$.

Gegeben ist die konkrete DGL: $\mathbf{U_0 - L \cdot J' - R \cdot J = 0}$

Umformung: $$\mathbf{J' + \frac{R}{L} \cdot J = \frac{U_0}{L}}$$

Lösung über die Variation der Konsntanten:

Homogene DGL: $\mathbf{J' + \frac{R}{L} \cdot J = 0}$ Triviale Lösung: $\mathbf{J = 0}$

Differentialquotient: $$\mathbf{\frac{dJ}{dt} = -\frac{R}{L} \cdot J}$$

Trennen der Variablen: $\mathbf{\frac{dJ}{J} = -\frac{R}{L} \cdot dt}$ mit $\mathbf{J \neq 0}$

Integration: $$\mathbf{\int \frac{1}{J}\, dJ = \int -\frac{R}{L}\, dt + c \rightarrow \ln(J) = c - \frac{R \cdot t}{L}}$$

kein Betrag, da $\mathbf{J > 0}$

Delogarithmieren: $$\mathbf{J = e^{-\frac{R}{L} \cdot t + c} = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Allgemeine Lösung des homogenen Systems: $$\mathbf{J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Variation der Konstanten: $$\mathbf{J = C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

$$\mathbf{J' = C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}$$

Einsetzen in die inhomogene DGL: $J' + \frac{R}{L} \cdot J = \frac{U_0}{L}$

$$C'(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + C(t) \cdot \left(-\frac{R}{L}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot \left(C(t) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = \frac{U_0}{L} \text{ vereinfachen } \rightarrow C'(t) \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{L}} = \frac{U_0}{L}$$

Auflösen nach C'(t): $C'(t) \cdot e^{-\frac{R \cdot t}{L}} = \frac{U_0}{L} \text{ auflösen}, C'(t) \rightarrow \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L}$

$$C'(t) = \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L}$$

Integrieren: $C(t) = \int \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{L} \, dt \rightarrow C(t) = \frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{R}$

Spezielle Lösung des inhomogenen Systems:

$$J(t) = \left(\frac{U_0 \cdot e^{\frac{R \cdot t}{L}}}{R}\right) \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = \frac{U_0}{R}$$

Allgemeine Lösung des inhomogenen Systems:

$$J(t) = C \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{U_0}{R}$$

Anfangsbedingung: $J(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C \cdot e^0 + \frac{U_0}{R} = 0 \text{ auflösen}, C \rightarrow -\frac{U_0}{R}$

Partikuläre Lösung: $J(t) = \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right)$

Konkretes Zahlenbeispiel: $L := 15 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{V \cdot s}{A}$ $\quad R := 15 \cdot \frac{V}{A}$ $\quad U_0 := 30 \cdot V$

$$J(t) := \frac{U_0}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}\right) = -4.8290000000000006 \cdot e^{-\frac{1000.0 \cdot t}{}} \quad J_0 := 2 \cdot A$$

8290000000000006