Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
An einem Flughafen sind 10% der Reisenden Fernreisende. Unter den Fernreisenden befinden sich 15% Nicht-Pauschalreisende. Der Anteil der Nicht-Pauschalreisenden an allen Reisenden am Flughafen beträgt 20%.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein im Flughafen zufällig herausgegriffener Pauschalreisender keine Fernreise macht.

Gegeben:

F: *Ein zufällig ausgewählter Reisender ist Fernseisender.*

Q: *Ein zufällig ausgewählter Reisender ist Pauschalreisender.*

$P(F) = 10\ \% = 0.10$ $\qquad P_F(\overline{Q}) = 15\% = 0.15$ $\qquad P(\overline{Q}) = 0.20$

Gesucht: $\qquad P_Q(\overline{F}) = \dfrac{P(Q \cap \overline{F})}{P(Q)}$

$$P_F(\overline{Q}) = \frac{P(F \cap \overline{Q})}{P(F)} \quad \Leftrightarrow \quad P(F \cap \overline{Q}) = P_F(\overline{Q}) \cdot P(F) = 0.15 \cdot 0.10 = 0.015$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & F & \overline{F} & \blacksquare \\ Q & 0.085 & 0.715 & 0.80 \\ \overline{Q} & 0.015 & 0.185 & 0.20 \\ \blacksquare & 0.10 & 0.90 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_Q(\overline{F}) = \frac{0.715}{0.80} = 0.89375$$

Teilaufgabe 1.2 (7 BE)
Im Weiteren wird nur zwischen Fernreisenden und Nicht-Fernreisenden unterschieden. Es werden nun 20 Reisende nacheinander befragt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse:
A: *Es befinden sich genau 2 Fernreisende unter den Befragten.*
B: *Es befinden sich genau 2 aufeinander folgende Fernreisende unter den Befragten.*
C: *Es befinden sich mindestens doppelt so viele Fernreisende unter den Befragten wie erwartet.*
D: *Nur die letzten 2 Befragten sind Fernreisende.*

TW

$P(A) = P(X = 2) = B(20, 0.1, 2) = 0.28518$

$P(B) = \blacksquare$

xx000000000000000000 $\qquad$ **0xx00000000000000000** $\qquad$ **. . .** $\qquad$ **000000000000000000xx**

19 Möglichkeiten $\qquad P(B) = 19 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^{18} = 0.02852$

Erwartungswert: $\mu := 20 \cdot 0.1 = 2$

$$P(C) = P(X \geq 2 \cdot \mu) = P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.86705 = 0.13295$$

$$P(D) = 0.9^{18} \cdot 0.1^{2} = 0.00150$$

Teilaufgabe 2 (4 BE)
Bei einer Reisegruppe von 30 Personen wird bei der Passkontrolle eine Stichprobe vorgenommen. Bei 2 Personen ist der Pass abgelaufen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 10 kontrollierten Personen höchstens einer der beiden abgelaufenen Pässe entdeckt wird?

$$P = \frac{\binom{2}{0} \cdot \binom{28}{10}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{28}{9}}{\binom{30}{10}} = \frac{1 \cdot 13123110 + 2 \cdot 6906900}{30045015} = 0.89655$$

$\mathrm{combin}(2, 0) = 1$ $\mathrm{combin}(2, 1) = 2$

$\mathrm{combin}(28, 10) = 13123110$ $\mathrm{combin}(28, 9) = 6906900$

$\mathrm{combin}(30, 10) = 30045015$ $\mathrm{combin}(30, 10) = 30045015$

Teilaufgabe 3 (7 BE)
Zur Verkürzung der Wartezeit ist im Flughafen eine Wurfbude für die Kinder aufgebaut. Max wirft dreimal. Beim ersten Wurf hat er eine Trefferquote von 60%. Trifft er bei einem Wurf, so bleibt die Trefferquote unverändert. Trifft er nicht, so sinkt seine Trefferquote für den nächsten Wurf um 10 Prozentpunkte. Dies gilt für jeden Wurf.
Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Treffer bei drei Würfen* auf, berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.

$A = \{ TTT \}$

$$P(X = 3) = P(A) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.216$$

$B = \{ TT\overline{T}, T\overline{T}T, \overline{T}TT \}$

$$P(X = 2) = P(B) = 0.6 \cdot 0.6 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.50 = 0.364$$

$C = \{ T\overline{T}\,\overline{T}, \overline{T}\,\overline{T}T, \overline{T}T\overline{T} \}$

P von Treffer sinkt, deshalb steigt P von Nichttreffer

$$P(X = 1) = P(C) = 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.5 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.50 = 0.300$$

$D = \{ \overline{TTT} \}$

$$P(X = 0) = P(D) = 0.4 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.12$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P(X) & 0.12 & 0.3 & 0.364 & 0.216 \end{pmatrix}$$

$\mu := 0 \cdot 0.12 + 1 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.364 + 3 \cdot 0.216$ $\qquad \mu = 1.676$

$Var\_X := 1^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.364 + 3^2 \cdot 0.216 - \mu^2$ $\qquad Var\_X = 0.891$

$\sigma := \sqrt{Var\_X}$ $\qquad \sigma = 0.944$

Teilaufgabe 4
Ein Hersteller von Tropenkleidung lässt auf zwei verschiedene Arten Kleidungsstücke produzieren. Bei der Produktionsart A treten bei 15% der produzierten Stücke Fehler auf. Bei der zweiten (billigeren) Produktionsart B ergeben sich 30% fehlerhafte Kleidungsstücke.

Teilaufgabe 4.1 **(8 BE)**
Im Lager befinden sich einige unbeschriftete Kisten. Es werden 75 Kleidungsstücke überprüft. Wie muss die Entscheidungsregel lauten, damit der Fehler, die Produktionsart B für die Produktionsart A zu halten, unter 5% liegt?
Wie groß ist dann der Fehler, die Produktionsart A für die Produktionsart B zu halten.?

Testgröße: Anzahl der fehlerhaften Kleidungsstücke unter $n := 74$ überprüften Kleidungsstücken.

Annähernd binomialverteilte Zufallsgröße mit $W_1(k) = B(75, p_1, k)$ bzw. $W_2(k) = B(75, p_2, k)$.

Hypothese 1: $\quad p_1 := 0.15$ $\qquad$ Hypothese 2: $\quad p_2 := 0.3$

$A_1 = \{0, 1, ..., k\} = \overline{A_2}$ $\qquad A_2 = \{k+1, k+2, ..., 1000\} = \overline{A_1}$

Alternativtest mit Entscheidungsregel:

$X \le k$ $\quad$ Entscheidung für H_1. $\qquad X > k$ $\quad$ Entscheidung für H_2.

Teilaufgabe a) $\quad \mu_2 := 75 \cdot 0.3 = 22.5$ $\qquad \sigma_2 := \sqrt{75 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = 3.969$

$$P\left(\overline{A_2}\right) < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le k) < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2}\right) < 0.05$$

$$\frac{k - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2} < -1.645 \text{ auflösen}, k \rightarrow -\infty < k < 15.471608639948123188$$

Abrunden: $\quad k = 15$

$\mu_1 := 75 \cdot 0.15 = 11.25 \qquad \sigma_1 := \sqrt{75 \cdot 0.15 \cdot 0.85} = 3.092$

$$\alpha_1 = P\left(\overline{A_1}\right) = P\left(A_2\right) = P(X \geq 16) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - \Phi\left(\frac{15 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = 1 - \Phi(1.34)$$

$\alpha_1 := 1 - 0.90988 = 0.09012$

ohne Tschebyschow

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)
Bestimmen Sie für die Fehlerwahrscheinlichkeit **p = 0.3** mit der Ungleichung von Tschebyschow ein möglichst kleines Intervall, in dem sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85% die Anzahl der fehlerhaften Kleidungsstücke bei 1000 produzierten Kleidungsstücken befindet.

Es soll gelten: $P(|X - \mu| < c) \geq 0.85$ wobei c möglichst klein ist.

Ungleichung:

$$P(|X - \mu| \geq c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(|X - \mu| < c) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad P(|X - \mu| < c) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$$1 - \frac{\sigma^2}{c^2} = 0.85 \qquad \frac{\sigma^2}{c^2} = 0.15 \qquad c := \sqrt{\frac{\sigma^2}{0.15}} \qquad c = 37.417$$

unten aufrunden, oben abrunden:

$\text{ceil}(\mu - c) \leq X \leq \text{floor}(\mu + c) \rightarrow 263 \leq X \leq 337$

$W(337.5) - W(262.5) = 0.99$

Teilaufgabe 4.3 (7 BE)
Berechnen Sie mithilfe der Normalverteilung als Näherung, wie viele Kleidungsstücke der ersten Produktionsart (15% fehlerhaft) mindestens geprüft werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens 10 fehlerhafte Kelidungsstücke zu finden.

X: Anzahl der fehlerhaften Kleidungsstücke unter n Kleidungsstücken der Produktionsart A.

$p := 0.15 \qquad \mu = 0.15 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.15 \cdot n \cdot 0.85} = 0.35707 \cdot \sqrt{n}$

$P(X \geq 10) > 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 9) > 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 9) < 0.10$

$$\Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{9 - 0.15 \cdot n + 0.5}{0.35707 \cdot \sqrt{n}}\right) < 0.10 \qquad \text{TW} \qquad \frac{9 - 0.15 \cdot n + 0.5}{0.35707 \cdot \sqrt{n}} < -1.281$$

$\Leftrightarrow \qquad 9 - 0.15 \cdot n + 0.5 < -1.281 \cdot 0.35707 \cdot \sqrt{n}$

Umtellen: $\qquad 0.15 \cdot n - 0.45741 \cdot \sqrt{n} - 9.5 > 0$

Substitution: $\qquad \sqrt{n} = z$

$$0.15 \cdot z^2 - 0.45741 \cdot z - 9.5 > 0 \ \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 9.63 < z < \infty \vee -\infty < z < -6.58$$

$z := 9.63$

Resubstitution: $\qquad n := z^2 = 92.737$

Aufrunden: $\qquad n := 93$

Es müssen mindestens 93 Kleidungsstücke der Produktionsart A geprüft werden.