Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2004

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
In einem Land wurde vor kurzem eine Repräsentativumfrage durchgeführt, die einen Eindruck vermitteln sollte bezüglich der Einstellung der Bevölkerung zur Chemie bzw. der chemischen Industrie. Es ergab sich folgendes Bild:
38% der Befragten haben zur Chemie eine eher positive Einstellung (C), der Rest eine eher negative. Der Anteil derjenigen Befragten, die mindestens eine mittlere Schulbildung besitzen, beträgt 75% (M). 70% derjenigen Befragten, die nicht mindestens mittlere Schulbildung besitzen, lehnen die Chemie ab.
Alle in der Befragung sich ergebenden relativen Häufigkeiten werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Man fragt 8 zufällig ausgewählte Bewohner des Landes nach ihrer Einstellung zur Chemie. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) mindestens drei davon,
b) die letzten drei davon,
c) nur die letzten drei davon
eine eher negative Einstellung äußern.

Zufallsgröße X: Anzahl der Personen mit negativer Einstellung zur Chemie bei 8 befragten Personen.

Binomialverteilte Zufallsgröße mit $W(k) = B(8, 0.62, k)$.

Teilaufgabe a)

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left[\binom{8}{0} \cdot 0.62^0 \cdot 0.38^8 + \binom{8}{1} \cdot 0.62^1 \cdot 0.38^7 + \binom{8}{2} \cdot 0.62^2 \cdot 0.38^6\right] = 0.96148$$

Nebenrechnungen:

$$\text{combin}(8,0) \cdot 0.62^0 \cdot 0.38^8 = 0.00043$$

$$\text{combin}(8,1) \cdot 0.62^1 \cdot 0.38^7 = 0.00568$$

$$\text{combin}(8,2) \cdot 0.62^2 \cdot 0.38^6 = 0.03241$$

$$1 - \left(\text{combin}(8,0) \cdot 0.62^0 \cdot 0.38^8 + \text{combin}(8,1) \cdot 0.62^1 \cdot 0.38^7 + \text{combin}(8,2) \cdot 0.62^2 \cdot 0.38^6\right) = 0.96148$$

Teilaufgabe b)

$$P_{letzte\_drei} = 0.62^3 = 0.23833$$

Teilaufgabe c)

$$P_{nur\_letzte\_drei} = 0.38^5 \cdot 0.62^3 = 0.00189$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Bestimmen Sie die Anzahl derjenigen Personen, die man mindestens befragen müsste, damit man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99,9% mindestens eine mit positiver Meinung zur Chemie findet.

$$P(X \geq 1) > 0.999 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0.999 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) < 0.001$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0.38^0 \cdot 0.62^n < 0.001 \quad \Leftrightarrow \quad 0.62^n < 0.001$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot \ln(0.62) < \ln(0.001) \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{\ln(0.001)}{\ln(0.62)}$$

$n > 14.45$ aufrunden:

Man muss mindestens 15 Personen befragen.

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)
Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person
a) mindestens mittlere Schulbildung hat und der Chemie gegenüber eher positiv eingestellt ist.
b) die mindestens mittlere Schulbildung hat, der Chemie gegenüber eher positiv eingestellt ist.
c) die der Chemie gegenüber positiv eingestellt ist, mindestens mittlere Schulbildung besitzt.

C: Eine zufällig ausgewählte Person hat zur Chemie eine positive Einstellung.

M: Eine zufällig ausgewählte Person hat mindestens eine mittlere Schulbildung.

Gegeben: $P(C) = 0.38 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{C}) = 0.62 \qquad P(M) = 0.75 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{M}) = 0.25$

$P_{\overline{M}}(\overline{C}) = 0.70$

Lösung: $$P_{\overline{M}}(\overline{C}) = \frac{P(\overline{M} \cap \overline{C})}{P(\overline{M})} \quad \Rightarrow \quad P(\overline{M} \cap \overline{C}) = P_{\overline{M}}(\overline{C}) \cdot P(\overline{M}) = 0.7 \cdot 0.25 = 0.175$$

$$\begin{pmatrix} . & C & \overline{C} & . \\ M & 0.305 & 0.445 & 0.75 \\ \overline{M} & 0.075 & 0.175 & 0.25 \\ . & 0.38 & 0.62 & 1 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe a) $P(M \cap C) = 0.305$

Teilaufgabe b) $$P_M(C) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)} = \frac{0.305}{0.75} = 0.407$$

Teilaufgabe c) $$P_C(M) = \frac{P(M \cap C)}{P(C)} = \frac{0.305}{0.38} = 0.803$$

Teilaufgabe 1.4 **(2 BE)**
Begründen Sie rechnerisch, ob in einem Land Chemiefreundlichkeit und Schulbildung stochastisch unabhängig sind oder nicht.

$P(C) \cdot P(M) = 0.38 \cdot 0.75 = 0.285$

$P(M \cap C) = 0.305$

$\Rightarrow \qquad P(C) \cdot P(M) \neq P(M \cap C)$

Also besteht zwischen Chemiefreundlichkeit und Schulbidung eine stochastische Abhängigkeit.

Teilaufgabe 2.0
Die Firma Compucheap stellt u. a. sehr preisgünstige Disketten her. Nach ihrer Garantie sind davon (höchstens) 6% fehlerhaft.
Die Disketten werden auch im Supermarkt XY angeboten. Dem Leiter der Computerabteilung von XY kommen im Laufe der Zeit Zweifel, ob die Herstellergarantie wirklich stimmt. Seiner Meinung nach sind mindestens 10% der Disketten unbrauchbar.
Um eine Entscheidung herbeizuführen, wied ein Test durchgeführt. Dabei werden einer sehr großen Lieferung 200 Disketten entnommen und auf ihre Tauglichkeit hin überprüft. Werden dabei mehr als 16 fehlerhafte entdeckt, will der Supermarkt die Lieferung nicht annehmen.

Teilaufgabe 2.1 **(8 BE)**
Berechnen Sie (unter Angabe der üblichen Kenngrößen) jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
a) der Supermarkt die Lieferung annimmt, obwohl in Wirklichkeit die Vermuting des Abteilungs-leiters stimmt.
b) Compucheap die Ware zurücknehmen muss, obwohl ihre Angaben der Wahrheit entsprechen.

Testgröße: Anzahl der fehlerhaften Disketten unter $n := 200$ geprüften Disketten.

Annähernd binomialverteilte Zufallsgröße mit $W_1(k) = B(200, p_1, k)$ bzw. $W_2(k) = B(200, p_2, k)$.

Hypothese 1: $p_1 := 0.06$ Hypothese 2: $p_2 := 0.10$

$A_1 = \{0, 1, \ldots, k\} = \overline{A_2}$ $A_2 = \{k+1, k+2, \ldots, 1000\} = \overline{A_1}$

Alternativtest mit Entscheidungsregel:

$X \le 16$ Entscheidung für H_1. $X > 16$ Entscheidung für H_2.

Teilaufgabe a) $\mu_2 := 200 \cdot 0.1 = 20$ $\sigma_2 := \sqrt{20 \cdot 0.9} = 4.243$

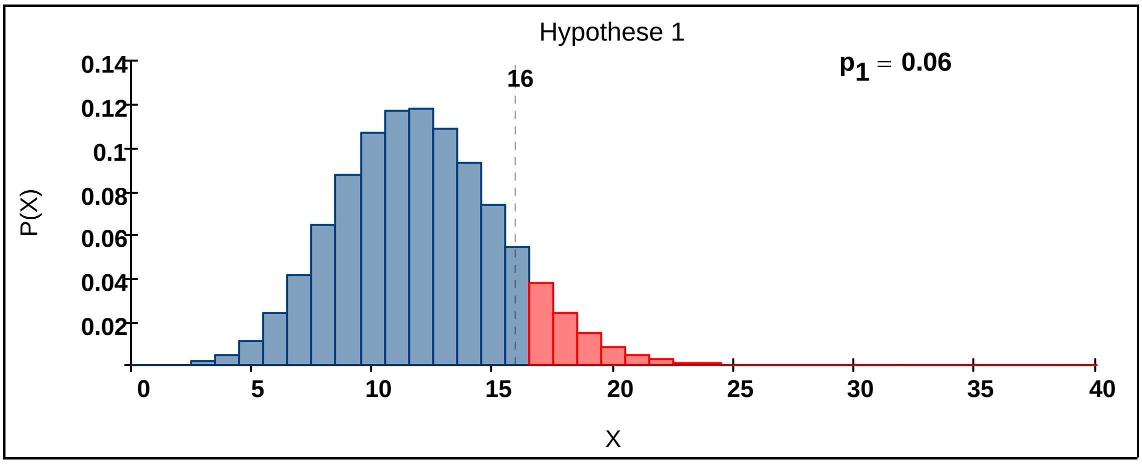
$$\beta_1 = P(A_1) = P\left(\overline{A_2}\right) = P(X \le 16) = \Phi\left(\frac{16 - \mu_2 + 0.5}{\sigma_2}\right) = \Phi(-0.82) = 1 - \Phi(0.82) = 1 - 0.79389$$

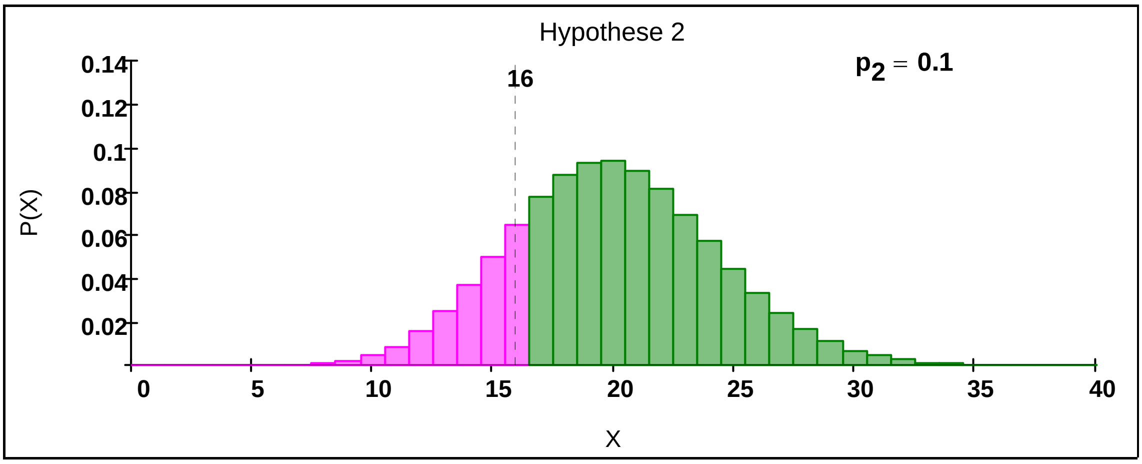
$\beta_1 = 0.20611$

Teilaufgabe b) $\mu_1 := 200 \cdot 0.06 = 12$ $\sigma_1 := \sqrt{12 \cdot 0.94} = 3.359$

$$\alpha_1 = P\left(\overline{A_1}\right) = P\left(A_2\right) = P(X \geq 17) = 1 - P(X \leq 16) = 1 - \Phi\left(\frac{16 - \mu_1 + 0.5}{\sigma_1}\right) = 1 - \Phi(1.34)$$

$\alpha_1 := 1 - 0.90988 = 0.09012$





Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Eine große Firma benötigt kurzfristig mindestens 5000 völlig einwandfreie Billigdisketten, möchte aber nicht unnötig viele davon bestellen. die Firma setzt voraus, dass die genannte Herstellergarantie stimmt.
Berechnen Sie, wie viele Disketten man mindestens bestellen müsste, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 5000 brauchbare zu erhalten, wenigstens 99% beträgt.

$$P(X \geq 5000) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 4999) \geq 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 4999) \leq 0.01$$

Brauchbare Disketten: $p := 0.94$

$\mu = 0.94 \cdot n$ $\qquad \sigma = \sqrt{0.94 \cdot n \cdot 0.06} = 0.23749 \cdot \sqrt{n}$

$$\Phi\left(\frac{4999 - 0.94 \cdot n + 0.5}{0.23749 \cdot \sqrt{n}}\right) \leq 0.01 \qquad \text{TW} \qquad \frac{4999 - 0.94 \cdot n + 0.5}{0.23749 \cdot \sqrt{n}} \leq -2.326$$

$$4999 - 0.94 \cdot n + 0.5 \leq -2.326 \cdot 0.23749 \cdot \sqrt{n}$$

Umstellen: $0.94 \cdot n - 0.5524 \cdot \sqrt{n} - 4999.5 \geq 0$

Substitution: $\sqrt{n} = z$

$$0.94 \cdot z^2 - 0.5524 \cdot z - 4999.5 \geq 0 \ \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 4 \end{array} \right. \rightarrow -\infty < z \leq -72.64 \vee 73.22 \leq z < \infty$$

$z \geq 73.22$

Resubstitution: $n := 73.22^2 = 5361.17$

Aufrunden: $n := 5362$

Man muss also mindestens 5362 Disketten bestellen.

Teilaufgabe 2.3 (8 BE)
Eine Umstellung des Produktionsverfahrens bei Compucheap macht es erforderlich, die Hersteller-garantie erneut zu überprüfen.
Dazu ermittelt man die relative Häufigkeit der fehlerhaften Disketten bei 1000 Stück, die zufällig der neuen Produktion entnommen werden. Schätzen Sie mithilfe der Ungleichung von Tschebyschow die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die so ermittelte relative Häufgigkeit vom unbekannten (tatsächlichen) Anteil p der fehlerhafen Disketten um weniger als 0,03 abweicht.

$n := 1000 \qquad \varepsilon := 0.03 \qquad h_n = \frac{k}{n} \qquad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \qquad \mu = n \cdot p$

$$P\left(\left|h_n - p\right| \geq c\right) \leq \frac{\sigma^2}{c^2} \quad \Leftrightarrow \quad P\left(\left|h_n - p\right| < k\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \qquad c := 0.03$$

$$P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0.03\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{c^2} \qquad P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < 0.03\right) \geq 1 - \frac{1}{4 \cdot 0.03^2 \cdot 1000}$$

$$1 - \frac{1}{4 \cdot 0.03^2 \cdot 1000} = 0.722$$