

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999 Mathematik 13 Technik - A II - Aufgabentext



Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit der in \mathbb{R} definierten maximalen Definitionsmenge D_{f_a} durch $f_a(x) = \ln\left(\left|\frac{2 \cdot x}{x^2 - a}\right|\right)$.

Teilaufgabe 1.1 (11 BE)

Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} und die Nullstellen von f_a sowie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a .

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass in der gesamten Definitionsmenge für die erste Ableitung gilt: $f'_a(x) = \frac{-(x^2 + a)}{x \cdot (x^2 - a)}$

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a .

Im Folgenden gilt $a = -1$.

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_{-1} für $x \rightarrow \pm \infty$ und für $x \rightarrow 0$.

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)

Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f_{-1} für $-5 \leq x \leq 5$ (1 LE = 1 cm). Berücksichtigen Sie dabei auch die Wendepunkte, die näherungsweise bei $(-2.06, -0.24)$ und $(2.06, -0.24)$

Teilaufgabe 1.6 (8 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = x \cdot f_{-1}(x) + x - 2 \cdot \arctan(x)$, $D_F = \mathbb{R}^+$, eine Stammfunktion von f_{-1} für $x > 0$ ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f_{-1}(x) dx$.

Teilaufgabe 2 (8 BE)

Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mittels der Methode der Variation der Konstanten.

$$-(1+x)^2 \cdot y' + y = (2 \cdot x + 2) \cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

Teilaufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen h_1 und h_2 durch $h_1(x) := 3 + \sqrt{4 - x^2}$ und $h_2(x) := 3 - \sqrt{4 - x^2}$ mit $x \in D_h = [-2; 2]$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte der Graphen von h_1 und h_2 . Beschreiben Sie, wie der Graph von h_2 aus dem Graphen von h_1 hervorgeht, und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

Teilaufgabe 3.2 (4 BE)

Berechnen Sie den Wert des Integrals $J_1 = \pi \cdot \int_{-2}^2 (h_1(x))^2 dx$.

Teilaufgabe 3.3 (3 BE)

Interpretieren Sie die Differenz $J_1 - J_2$ mit $J_2 = \pi \cdot \int_{-2}^2 (h_2(x))^2 dx$ als Volumeninhalt.