Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1999
Mathematik 13 Technik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $\mathbf{a} \in \mathbf{IR} \setminus \{0\}$ mit der in IR definierten maximalen Definitionsmenge D_{f_a} durch $f_a(x) = \ln\left(\left|\frac{2\cdot x}{x^2 - a}\right|\right)$.

Teilaufgabe 1.1 (11 BE)
Bestimmen Sie die Definitionsmenge D_{f_a} und die Nullstellen von f_a sowie das Symmetrieverhalten des Graphen von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

$$x^2 - a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a} \\ -\sqrt{a} \end{pmatrix}$$

Für $a > 0$ gilt: $\quad D = \mathbf{IR} \setminus \{ 0 ; \ -\sqrt{a} ; \sqrt{a} \}$

Für $a < 0$ gilt: $\quad D = \mathbf{IR} \setminus \{ 0 \}$

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{2\cdot x}{x^2 - a}\right| = 1$$

$$\frac{2\cdot x}{x^2 - a} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cdot x}{x^2 - a} = 1 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a+1} + 1 \\ 1 - \sqrt{a+1} \end{pmatrix}$$

$$\frac{2\cdot x}{x^2 - a} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\cdot x}{x^2 - a} = -1 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{a+1} - 1 \\ -\sqrt{a+1} - 1 \end{pmatrix}$$

$$a + 1 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -1 < a$$

Für $a > -1 \wedge a \neq 0$: Vier einfache Nullstellen

$x_1(a) := 1 - \sqrt{a+1} \qquad x_2(a) := 1 + \sqrt{a+1}$

$x_3(a) := -1 - \sqrt{a+1} \qquad x_4(a) := -1 + \sqrt{a+1}$

Für $a = -1$: Zwei zweifache Nullstellen

$x_{12} = 1 \qquad x_{34} = -1$

Für $a < -1$ keine Nullstellen.

$$f_a(-x) = \ln\left[\left|\frac{2\cdot(-x)}{(-x)^2 - a}\right|\right] = \ln\left(\left|\frac{-2\cdot x}{x^2 - a}\right|\right) = \ln\left(\left|\frac{2\cdot x}{x^2 - a}\right|\right) = f_a(x)$$

Achsensymmetrie zur y-Achse.

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Zeigen Sie, dass in der gesamten Definitionsmenge für die erste Ableitung gilt: $f'_a(x) = \frac{-\left(x^2 + a\right)}{x\cdot\left(x^2 - a\right)}$

$\frac{2\cdot x}{x^2 - a} > 0$ $\qquad f_a(x) = \ln\left(\frac{2\cdot x}{x^2 - a}\right)$

$$f'_a(x) = \frac{x^2 - a}{2\cdot x}\cdot\frac{2\cdot\left(x^2 - a\right) - 2\cdot x\cdot 2\cdot x}{\left(x^2 - a\right)^2} = \frac{2\cdot x^2 - 2\cdot a - 4\cdot x^2}{2\cdot x\cdot\left(x^2 - a\right)} = \frac{-2\cdot x^2 - 2\cdot a}{2\cdot x\cdot\left(x^2 - a\right)} = \frac{-\left(x^2 + a\right)}{x\cdot\left(x^2 - a\right)}$$

$\frac{2\cdot x}{x^2 - a} < 0$ $\qquad f_a(x) = \ln\left(\frac{-2\cdot x}{x^2 - a}\right)$

$$f'_a(x) = \frac{x^2 - a}{-2\cdot x}\cdot\frac{-2\cdot\left(x^2 - a\right) + 2\cdot x\cdot 2\cdot x}{\left(x^2 - a\right)^2} = \frac{-2\cdot x^2 + 2\cdot a + 4\cdot x^2}{-2\cdot x\cdot\left(x^2 - a\right)} = \frac{2\cdot x^2 + 2\cdot a}{-2\cdot x\cdot\left(x^2 - a\right)} = \frac{-\left(x^2 + a\right)}{x\cdot\left(x^2 - a\right)}$$

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a.

$f'_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -a \quad \Leftrightarrow \quad x_{h1} = -\sqrt{-a} \qquad x_{h2} = \sqrt{-a}$

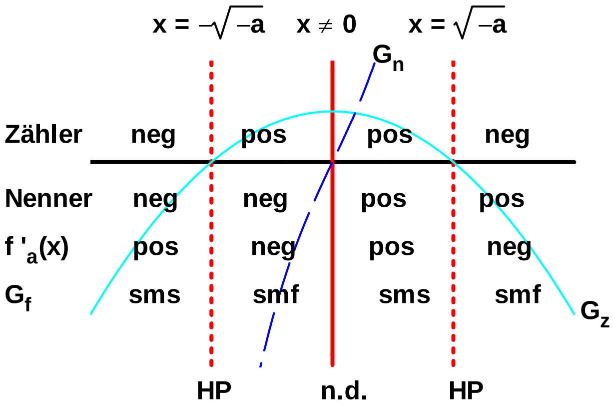
$a > 0$ keine Extrempunkte

$a < 0$ es gibt Extrempunkte $\qquad D = IR \setminus \{ 0 \}$ $\qquad y0 := -20 .. 10$

Zählerfunktion: $z(x) = -x^2 - a$

Nennerfunktion: $n(x) = x\cdot\left(x^2 - a\right)$

$x^2 - a > 0$ für $a < 0$ Vorzeichen entscheidet der Term x



$f\left(\sqrt{-a}, a\right)$ annehmen, $a < 0 \quad \rightarrow \ln\left[(-a)^{\frac{-1}{2}}\right]$

$HP_1\left(-\sqrt{-a} \,/\, \ln\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right)\right) \qquad HP_2\left(\sqrt{-a} \,/\, \ln\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right)\right)$

Im Folgenden gilt $a = -1$.

Teilaufgabe 1.4 (3 BE)
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_{-1} für $x \rightarrow \pm\infty$ und für $x \rightarrow 0$.

$$f1(x) := \ln\left(\left|\frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\right|\right)$$

$x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1} \rightarrow 0 \qquad \text{(Zählergrad < Nennergrad)} \qquad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cdot x}{x^2 + 1} \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\right) \rightarrow -\infty$$

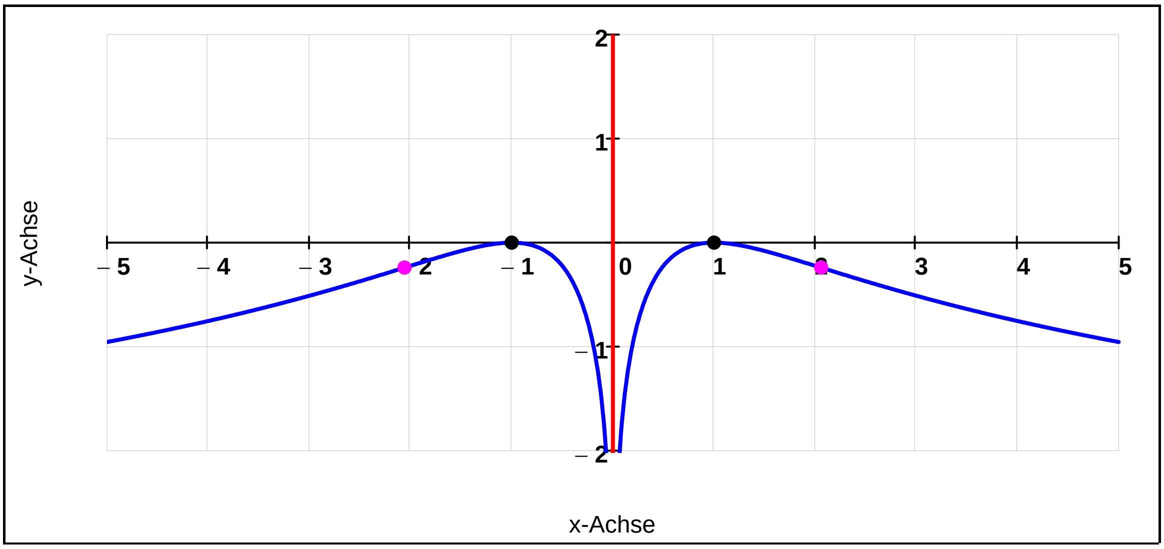
$x < 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(2 \cdot x)}{x^2 + 1} \rightarrow 0 \qquad \text{(Zählergrad < Nennergrad)} \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left[\frac{-(2 \cdot x)}{x^2 + 1}\right] \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-(2 \cdot x)}{x^2 + 1} \rightarrow 0 \qquad \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln\left(\frac{-2 \cdot x}{x^2 + 1}\right) \rightarrow -\infty$$

Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion f_{-1} für $-5 \le x \le 5$ (1 LE = 1 cm). Berücksichtigen Sie dabei auch die Wendepunkte, die näherungsweise bei $(-2.06, -0.24)$ und $(2.06, -0.24)$

Hochpunkte: $HP_1(-1, 0)$ $HP_2(1, 0)$



Teilaufgabe 1.6 (8 BE)
Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x) = x \cdot f_{-1}(x) + x - 2 \cdot \arctan(x)$, $D_F = IR^+$, eine Stammfunktion von f_{-1} für $x > 0$ ist, und berechnen Sie $\int_0^1 f_{-1}(x)\, dx$.

$$F(x) = x \cdot f_{-1}(x) + x - 2 \cdot \arctan(x)$$

$$F'(x) = 1 \cdot \left[f_{-1}(x)\right] + x \cdot \frac{-\left(x^2 - 1\right)}{x \cdot \left(x^2 + 1\right)} + 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$F'(x) = f_{-1}(x) - \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{2}{x^2 + 1} = f_{-1}(x) + \frac{-x^2 + 1 + x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} = f_{-1}(x)$$

$$F(x) = x \cdot \ln\left(\left|\frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\right|\right) + x - 2 \cdot \arctan(x) = x \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot x}{x^2 + 1}\right) + x - 2 \cdot \arctan(x)$$

Betrag weglassen, da x > 0.

$$\int_0^1 f_{-1}(x)\,dx = F(1) - \lim_{k \to 0^+} F(k)$$

$$\lim_{k \to 0^+} F(k) = \lim_{k \to 0^+} \left(\underbrace{k \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot k}{k^2+1}\right)}_{\downarrow\atop 0} + \underbrace{k}_{\downarrow\atop 0} - \underbrace{2 \cdot \arctan(k)}_{\downarrow\atop 0} \right) = 0$$

Nebenrechnung:

$$\lim_{k \to 0^+} \left(k \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot k}{k^2+1}\right)\right) = \lim_{k \to 0^+} \frac{\overbrace{\ln\left(\frac{2 \cdot k}{k^2+1}\right)}^{-\infty \atop \uparrow}}{\underbrace{\frac{1}{k}}_{\downarrow \atop \infty}} = \lim_{k \to 0^+} \frac{\frac{-\left(k^2-1\right)}{k \cdot \left(k^2+1\right)}}{\frac{-1}{k^2}}$$

$$\blacksquare = \lim_{k \to 0^+} \frac{k \cdot \left(k^2-1\right)}{k^2+1} = 0$$

$$\int_0^1 f_{-1}(x)\,dx = F(1) = 1 \cdot \ln\left(\frac{2 \cdot 1}{1^2+1}\right) + 1 - 2 \cdot \arctan(1) = 1 - 2 \cdot \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{2}$$

Teilaufgabe 2 (8 BE)
Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mittels der Methode der Variation der Konstanten.

$$-(1+x)^2 \cdot y' + y = (2 \cdot x + 2) \cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

Inhomogene DGL:

$$y' - \frac{y}{(1+x)^2} = \frac{-2 \cdot (x+1)}{(1+x)^2} \cdot e^{\frac{-1}{x+1}} \qquad \Leftrightarrow \qquad y' - \frac{y}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1+x} \cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

Homogene DGL und mit Verwendung vom Differentialquotienten:

$$y' - \frac{y}{(1+x)^2} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{(1+x)^2}$$

Triviale Lösung: $y = 0$

Trennen der Variablen und Integration mit $y \neq 0$:

$$\frac{1}{y} \cdot dy = \frac{1}{(1+x)^2} \cdot dx \qquad \int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{1}{(1+x)^2}\, dx + k \to \ln(y) = k - \frac{1}{x+1}$$

Mathcad lässt den Betrag weg, also: $\ln(|y|) = k - \frac{1}{x+1}$

Delogarithmieren

$$y > 0 \qquad y = e^{k - \frac{1}{x+1}} = K_1 \cdot e^{\frac{-1}{x+1}} \qquad K_1 = e^k > 0$$

$$y < 0 \qquad y = -e^{k - \frac{1}{x+1}} = K_2 \cdot e^{\frac{-1}{x+1}} \qquad K_2 = -e^k < 0$$

mit trivialer Lösung, allgemeine Lsg. der hom. DGL: $y_h(x) = K \cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x) \cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$

Ableitung: $$y'_p(x) = K'(x)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} + K(x)\cdot\left[\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}\right]$$

Einsetzen in inhomogene DGL: $$y' - \frac{y}{(1+x)^2} = \frac{-2}{1+x}\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

$$K'(x)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} + K(x)\cdot\left[\frac{1}{(x+1)^2}\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}\right] - \frac{1}{(1+x)^2}\cdot K(x)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} = \frac{-2}{1+x}\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad K'(x)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} = \frac{-2}{1+x}\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} \qquad \Leftrightarrow \quad K'(x) = \frac{-2}{1+x}$$

Integrieren:

$$K(x) := \int \frac{-2}{1+x}\,dx \text{ ersetzen}, \ln(x+1) = \ln(|x+1|) \quad = -2\cdot\ln(|x+1|)$$

Da $x > 0$ gilt: $$K(x) = -2\cdot\ln(x+1)$$

Spezielle Lösung der inhomg. DGL: $$y_p(x) := -2\cdot\ln(x+1)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

Allgemeine Lösung der inhomg. DGL: $$y_A(x,K) := K\cdot e^{\frac{-1}{x+1}} - 2\cdot\ln(x+1)\cdot e^{\frac{-1}{x+1}}$$

Teilaufgabe 3

Gegeben sind die Funktionen h_1 und h_2 durch $h_1(x) := 3 + \sqrt{4 - x^2}$ und $h_2(x) := 3 - \sqrt{4 - x^2}$ mit $x \in D_h = [\,-2\,;\,2\,]$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Ermitteln Sie die Art und die Koordinaten der relativen Extrempunkte der Graphen von h_1 und h_2. Beschreiben Sie, wie der Graph von h_2 aus dem Graphen von h_1 hervorgeht, und zeichnen Sie die Graphen in ein Koordinatensystem.

$$h'_1(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(4 - x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot (-2 \cdot x) = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Der Zähler entscheidet das Vorzeichen.

$h'(x) > 0$ für $x \in [\,-2\,;\,0\,[$ $\quad\Rightarrow\quad$ G_{h_1} ist streng monoton steigend in $[\,-2\,;\,0\,]$.

$h'(x) < 0$ für $x \in]\,0\,;\,2\,]$ $\quad\Rightarrow\quad$ G_{h_1} ist streng monoton fallend in $[\,0\,;\,2\,]$.

$h_1(0) = 5$ Hochpunkt **H(0/5)**

$h_1(-2) = 3$ Tiefpunkt **T(–2/ 3)**

$h_1(2) = 3$ Tiefpunkt **T(2/ 3)**

$$h'_2(x) = -h'_1(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

Der Zähler entscheidet das Vorzeichen.

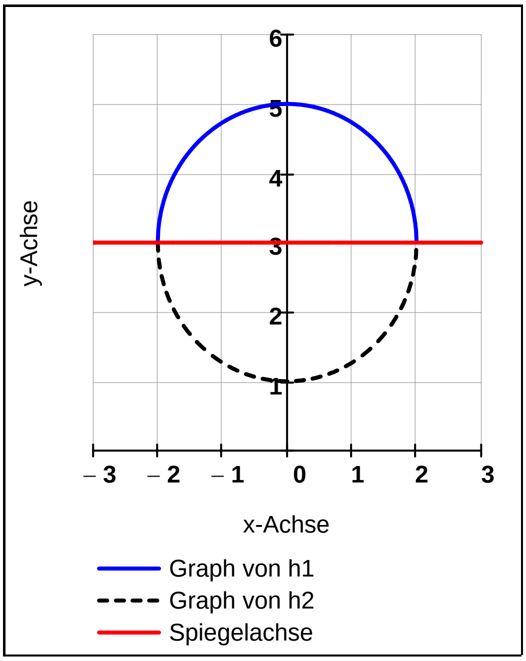
$h'(x) < 0$ für $x \in [\,-2\,;\,0\,[$ $\quad\Rightarrow\quad$ G_{h_1} ist streng monoton fallend in $[\,-2\,;\,0\,]$.

$h'(x) > 0$ für $x \in]\,0\,;\,2\,]$ $\quad\Rightarrow\quad$ G_{h_1} ist streng monoton steigend in $[\,0\,;\,2\,]$.

$h_2(0) = 1$ Tiefpunkt **H(0/1)**

$h_2(-2) = 3$ Hochpunkt **T(–2/ 3)**

$h_2(2) = 3$ Hochpunkt **T(2/ 3)**



Der Graph von h_2 entsteht durch Spiegelung des Graphen von h_1 an der waagrechten Geraden **y = 3**

Teilaufgabe 3.2 **(4 BE)**

Berechnen Sie den Wert des Integrals $J_1 = \pi \cdot \int_{-2}^{2} \left(h_1(x)\right)^2 \, dx$.

$$H(x) = \int \left(3 + \sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx = \int \left[9 + 6 \cdot \sqrt{4 - x^2} + \left(4 - x^2\right)\right] dx$$

$$\int \sqrt{4 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{4 - x^2} + 2 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$$ Nach Formelsammlung

$$H(x) := 13 \cdot x + 3 \cdot x \cdot \sqrt{4 - x^2} + 12 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot x^3$$

$$J_1 := 2 \cdot \pi \cdot (H(2) - H(0)) \qquad J_1 \rightarrow 2 \cdot \pi \cdot \left(6 \cdot \pi + \frac{70}{3}\right)$$

Teilaufgabe 3.3 (3 BE)

Interpretieren Sie die Differenz $J_1 - J_2$ mit $J_2 = \pi \cdot \int_{-2}^{2} \left(h_2(x)\right)^2 dx$ als Volumeninhalt.

Die Differenz $J_1 - J_2$ ist die Maßzahl des Volumens des Torus (Schwimmreifen), der bei der Rotation des Kreises K mit Mittelpunkt M(0/3) und Radius $r = 2$ um die x-Achse entsteht.

Definitionen

Rotationskörper Torus