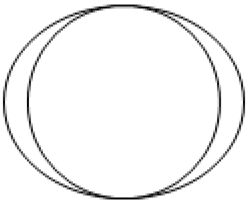
Das Gravitationsgesetz

Theorie

Newton übertrug die Gesetze der Mechanik auf die Planetenbewegung. Er überlegte sich, dass **die Kraft, die den freien Fall auf der Erdoberfläche bewirkt, dieselbe ist wie die, die den Mond auf seiner Bahn um die Erde bewegt.**
Natürlich gilt das 2. Kepler'sche Gesetz, welches theoretisch aus dem Drehimpulserhaltungssatz folgt. Die Ursache für die Planetenbewegung ist eine zur Sonne gerichtete Kraft .

Newton nun nahm an, dass sich die Planeten auf einer Kreisbahn bewegen (in der Tat weichen die Kepler'schen Ellipsenbahn nur sehr wenig von einer Kreisbahn ab).



Bei der Kreisbahn ist der Flächensatz nur dann erfüllt, wenn die Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω durchgeführt wird.

Bezeichnungen: $\vec{F}$: Anziehungskraft der Sonne; $\vec{F_Z}$: Zentralkraft;

m_S: Sonnenmasse; m_P: Planetenmasse

Nun gilt: $\vec{F} = \vec{F_Z}$ bzw. für die Beträge $\left|\vec{F}\right| = \left|\vec{F_Z}\right|$

Die Gesetze der gleichmäßigen Kreisbewegungen werden auf den Mond, der die Erde umkreist, übertragen:

$$F = F_Z = \frac{m_{Mond} \cdot v^2}{r} = m_{Mond} \cdot \omega^2 \cdot r = m_{Mond} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2} \cdot r \quad (*)$$

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz gilt:

$$\frac{T^2}{r^3} = C_{Erde} \quad \Leftrightarrow \quad T^2 = C_{Erde} \cdot r^3$$

Eingesetzt in (*):

$$F = m_{Mond} \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{C_{Erde} \cdot r^3} \cdot r = \frac{4 \cdot \pi^2}{C_{Erde}} \cdot \frac{m_{Mond}}{r^2} \quad \Rightarrow F \sim \frac{m_{Mond}}{r^2} \quad \textbf{(1)}$$

Das Wechselwirkungsprinzip (***actio et reactio***) besagt, dass die Kraft auch von der Sonne abhängig ist.

$$F \sim m_{Sonne} \quad \textbf{(2)}$$

Aus (1) und (2) folgt:

$$F \sim \frac{m_{Sonne} \cdot m_{Mond}}{r^2}$$

Mit dem Proportionalitätsfaktor G folgt im Jahr 1686 das ***Newton'sche Gravitationsgesetz***:

$$F = G \cdot \frac{m_{Sonne} \cdot m_{Mond}}{r^2}$$

Für ein beliebiges Zentralgestirn der Masse m_1 und einen beliebigen umlaufenden Körper der Masse m_2 gilt allgemein und in vektorieller Schreibweise:

$$F_{Grav} = -G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{e_r}$$

Dabei ist $\vec{e_r}$ der vom Mittelpunkt zum umlaufenden Punkt gerichtete normierte Ortsvektor.

Sir Isaac Newton
(4.1.1643 bis 31.3.1727)
Englischer Physiker, Mathematiker
und Astronom.

Die Gravitationskonstante $G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$ konnte erst mehr als 100 Jahre später experimentell bestimmt werden (vgl. Bestimmung der Gravitationskonstanten nach Cavendish).

Tabelle der Daten der Planeten des Sonnensystems (mit Pluto, dem der Planetenstatus 2006 aberkannt wurde):

Werte :=

	mittlerer Bahnradius in $10^6 \cdot km$	siderische Umlaufzeit in Tagen	mittlerer Radius in km	Masse in $10^{24} \cdot kg$
"Merkur"	57.91	87.969	$2.44 \cdot 10^3$	0.33
"Venus"	108.21	224.701	$6.052 \cdot 10^3$	4.869
"Erde"	149.6	365.256	$6.371 \cdot 10^3$	5.974
"Mars"	227.92	686.98	$3.389 \cdot 10^3$	0.642
"Jupiter"	778.57	$4.333 \cdot 10^3$	$6.991 \cdot 10^4$	$1.899 \cdot 10^3$
"Saturn"	$1.434 \cdot 10^3$	$1.076 \cdot 10^4$	$5.823 \cdot 10^4$	568.46
"Uranus"	$2.872 \cdot 10^3$	$3.069 \cdot 10^4$	$2.536 \cdot 10^4$	86.832
"Neptun"	$4.495 \cdot 10^3$	$6.019 \cdot 10^4$	$2.462 \cdot 10^4$	102.43
"Pluto"	$5.906 \cdot 10^3$	$9.046 \cdot 10^4$	$1.195 \cdot 10^3$	0.013

Aufgabe 1

Gegeben ist die Gravitationskonstante $G := 6.67428 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$ sowie die Masse der Sonne

$m_S := 1.9891 \cdot 10^{30} \cdot kg.$

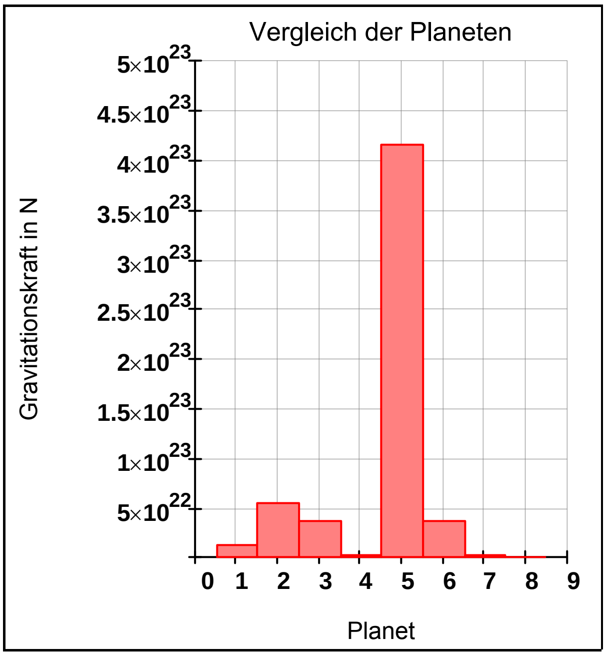
Berechnen Sie die Gravitationskraft, die ein Planet jeweils auf einer angenommen Kreisbahn im Mittel erfährt.

Wählen Sie den Planeten:

Merkur
Venus
Erde
Mars
Jupiter
Saturn
Uranus
Neptun

	mittlerer Bahnradius	Umlaufzeit	Masse
Planet = "Erde"	$r = 1.496 \times 10^{11} m$	$T = 3.156 \times 10^{7} s$	$m_P = 5.974 \times 10^{24} kg$

$F_{Grav} := G \cdot \frac{m_S \cdot m_P}{r^2}$ $\qquad F_{Grav} = 3.544 \times 10^{22} N$



F_{grav} in N

$$F_{grav} = \begin{pmatrix} \text{"1"} & \text{"Merkur"} & 1.307 \times 10^{22} \\ \text{"2"} & \text{"Venus"} & 5.52 \times 10^{22} \\ \text{"3"} & \text{"Erde"} & 3.544 \times 10^{22} \\ \text{"4"} & \text{"Mars"} & 1.64 \times 10^{21} \\ \text{"5"} & \text{"Jupiter"} & 4.158 \times 10^{23} \\ \text{"6"} & \text{"Saturn"} & 3.672 \times 10^{22} \\ \text{"7"} & \text{"Uranus"} & 1.397 \times 10^{21} \\ \text{"8"} & \text{"Neptun"} & 6.73 \times 10^{20} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Gravitationskonstante $G := 6.67428 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{m^3}{s^2 \cdot kg}$, die Masse der Erde $m_E := 5.9736 \cdot 10^{24} \cdot kg$ und des Erdenmondes $m_{Mond} := 7.349 \cdot 10^{22} \cdot kg$ und der mittlere Bahnradius der Umlaufbahn $r_{Mond} := 3.844 \cdot 10^8 \cdot m$.

Berechnen Sie die Gravitationskraft, die der Erdenmond auf einer angenommen Kreisbahn im Mittel erfährt.

$$F_{Grav2} := G \cdot \frac{m_E \cdot m_{Mond}}{r_{Mond}^2} \qquad F_{Grav2} = 1.98291 \times 10^{20} N$$