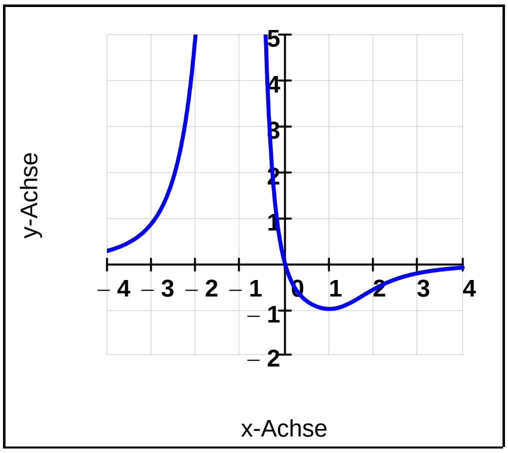
Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

• Mathematik 13 Technik - A I - Aufgabe

Teilaufgabe 1
Die Abbildung zeigt die wesentlichen Merkmale des Graphen einer Funktion g mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von g besitzt die Asymptoten mit den Gleichungen $y = 0$ und $x = -1$ und den Tiefpunkt $T(1/-1)$.
Die nachfolgenden Teilaufgaben sind mit den in der Abbildung enthaltenen Informationen zu bearbeiten.



(Graph der Originalaufgabe etwas verändert)

Teilaufgabe 1.1 (13 BE)
Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = \arccos(g(x))$ mit der in D_g maximalen Definitionsmenge D_h. Geben Sie D_h sowie die Nullstellen von h und das Monotonieverhalten von h und, so genau wie möglich, die Gleichungen der Asymptoten und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von h an.
Skizzieren Sie dann den Graphen von h.

Teilaufgabe 1.2 (11 BE)
Betrachtet wird nun die Integralfunktion J mit $J(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ mit der in D_g maximalen Definitionsmenge D_J.
Geben Sie D_J an und bestimmen Sie die Nullstellen von J und das Monotonieverhalten sowie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte des Graphen von J so genau wie möglich. Ermitteln Sie für erforderliche y-Koordinaten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von J aufgrund ihrer Ergebnisse und unter der Annahme, dass gilt:
$\int_{-1}^{0} g(x)\, dx = 2$ und $\int_{0}^{\infty} g(x)\, dx = -2$

Teilaufgabe 2.0
Gegeben sind die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot x + \sin(x)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ sowie $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Begünden Sie, dass für die Funktionswerte der ersten Ableitung gilt: $f'_a(x) \in [-1 + a\, ;\, 1 + a]$.
Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die der Graph von f_a über Extrempunkte verfügt.

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)
Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_1 unendlich viele Terrassenpunkte besitzt. Berechnen Sie dann deren Koordinaten. Zeichnen Sie den Gaphen von f_1 für $-\pi \le x \le 2 \cdot \pi$.

Teilaufgabe 2.3 (8 BE)

Berechnen Sie das Integral $\pi \cdot \int_0^{\pi} \left(f_1(x)\right)^2 \, dx$ und veranschaulichen Sie den Ergebniswert mit ihrer Darstellung aus 2.2.

Teilaufgabe 3

Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differentialgleichung:

$N'(t) = 0.1 \cdot N(t) \cdot (5 - N(t))$.

N(t) umfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t \geq 0$.

Dabei gilt: $0 < N(0) < 4.5$.

Teilaufgabe 3.1 (10 BE)

Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}$]

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)

Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}$]