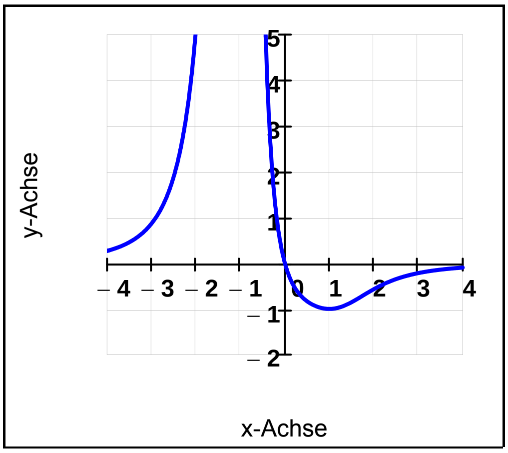
Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1
Die Abbildung zeigt die wesentlichen Merkmale des Graphen einer Funktion g mit der Definitionsmenge $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Der Graph von g besitzt die Asymptoten mit den Gleichungen $y = 0$ und $x = -1$ und den Tiefpunkt $T(1/-1)$.
Die nachfolgenden Teilaufgaben sind mit den in der Abbildung enthaltenen Informationen zu bearbeiten.



(Graph der Originalaufgabe verändert)

Teilaufgabe 1.1 (13 BE)
Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = \arccos(g(x))$ mit der in D_g maximalen Definitionsmenge D_h. Geben Sie D_h sowie die Nullstellen von h und das Monotonieverhalten von h und, so genau wie möglich, die Gleichungen der Asymptoten und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von h an.
Skizzieren Sie dann den Graphen von h.

$-1 \le g(x) \le 1 \quad \Rightarrow \quad D_h = \,]-\infty\,;\,-3\,] \cup [\,-0.25\,;\,\infty\,[$

$h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos(g(x)) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) = 1$

Nullstellen von h: $x_1 = -3$ $\quad x_2 = -0.25$

Mit wachsendem Argument g(x) nehmen die Funktionswerte von h(x) ab.

$\Rightarrow$ G_h ist streng monoton fallend in $]-\infty\,;\,-3\,]$ und in $[\,1\,;\,\infty\,[$.

Mit abnehmendem Argument g(x) nehmen die Funktionswerte von h(x) zu.

$\Rightarrow$ G_h ist streng monoton steigend in $]-0.25\,;\,1\,]$.

Tiefpunkt auf dem Rand bei $x = -3$: $\quad h(-3) = \arccos(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1\,(\,-3\,/\,0\,)$

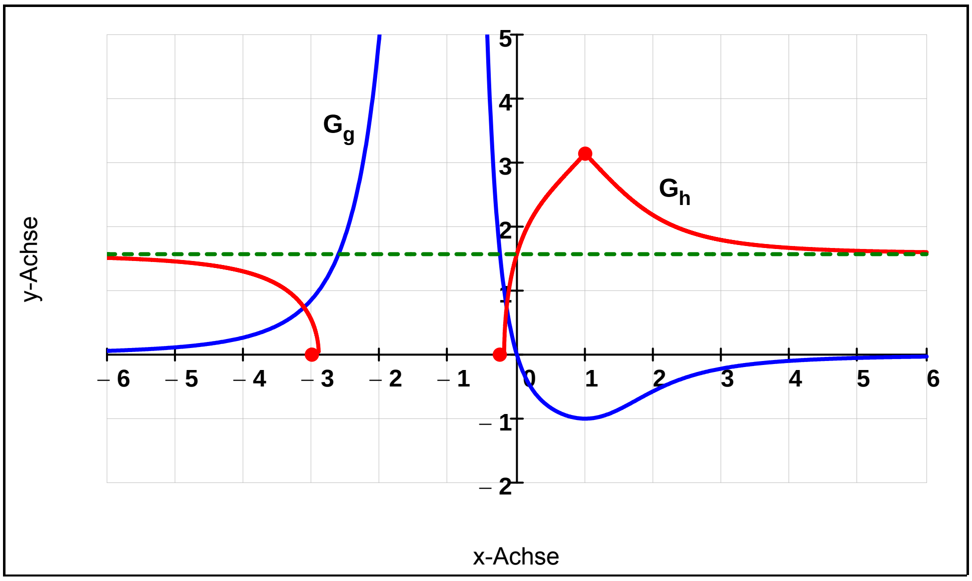
Tiefpunkt auf dem Rand bei $x = -0.25$: $\quad h(-0.25) = \arccos(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad T_2\,(\,-0.25\,/\,0\,)$

Hochpunkt bei $x = 1$: $\quad h(1) = \arccos(-1) = \pi \quad \Rightarrow \quad H\,(\,1\,/\,\pi\,)$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to -\infty} \arccos(g(x)) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) \to 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to \infty} \arccos(g(x)) \to \frac{\pi}{2}$$

waagrechte Asymptote: $y_0 := \frac{\pi}{2}$



Teilaufgabe 1.2 (11 BE)

Betrachtet wird nun die Integralfunktion J mit $J(x) = \int_0^x g(t)\,dt$ mit der in D_g maximalen Definitionsmenge D_J.

Geben Sie D_J an und bestimmen Sie die Nullstellen von J und das Monotonieverhalten sowie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte des Graphen von J so genau wie möglich. Ermitteln Sie für erforderliche y-Koordinaten Näherungswerte. Skizzieren Sie den Graphen von J aufgrund ihrer Ergebnisse und unter der Annahme, dass gilt:

$\int_{-1}^{0} g(x)\,dx = 2$ und $\int_{0}^{\infty} g(x)\,dx = -2$

Bedingung (1): $D_J \subseteq D_g \setminus \{-1\}$

Bedingung (2): D_J ist das größte Intervall, das in D_g liegt und die Null enthält.

Aus (1) und (2) folgt: $D_J =]-1;\infty[$

$J(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 0$ ist eine Nullstelle.

$J'(x) = g(x) \quad \Rightarrow$ J ist differenzierbar und damit stetig in $D_J =]-1;\infty[$.

$g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad J'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow$ G_J ist streng monoton steigend in $]-1;0[$

$g(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad J'(x) < 0 \quad \Leftrightarrow$ G_J ist streng monoton fallend in $]0;\infty[$

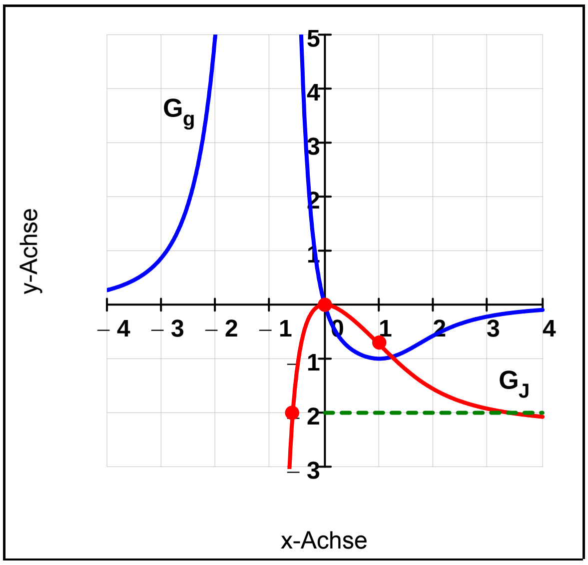
Wegen des Monotonieverhaltens von J ist $x_0 = 0$ die einzige Nullstelle von J und der Punkt H(0/0) ist Hochpunkt und einziger Extremalpunkt von J.

$x_1 = 1$ ist die einzige Extremalstelle von g, also besitzt der Graph von J nur bei $x_1 = 1$ einen Wendepunkt W. Aus dem Graphen von g erkennt man einen Flächeninhalt mit der Maßzahl von etwa 0.7, also hat der Wendepunkt die Koordinaten: $W(1 / -0.7)$

Wegen $\int_0^\infty g(x)\,dx = -2$ besitzt der Graph von J die waagrechte Asymptote $y_1 := -2$

Aus $\int_{-0.5}^{0} g(x)\,dx = 2$ folgt $\int_0^{-0.5} g(x)\,dx = -2$

$F(x) := \int_0^x g(t)\,dt$



$\int_0^3 g(x)\,dx = -1.929$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = a \cdot x + \sin(x)$ mit $D_{f_a} = IR$ sowie $a \in IR^+$.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Begünden Sie, dass für die Funktionswerte der ersten Ableitung gilt: $f'_a(x) \in [\,-1+a\,;\;1+a\,]$.

Ermitteln Sie diejenigen Werte von a, für die der Graph von f_a über Extrempunkte verfügt.

$f_a(x) = a \cdot x + \sin(x)$

$f'_a(x) = a + \cos(x)$

Es gilt: $-1 \le \cos(x) \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 + a \le \cos(x) + a \le 1 + a$

$\Leftrightarrow \quad -1 + a \le f'_a(x) \le 1 + a$

Extrempunkte des Graphen von f_a sind möglich, falls $f'_a(x)$ sowohl negativ als auch positiv werden kann, weil $f'_a(x)$ stetig in IR ist.

Es muss gelten: $a - 1 < 0 \wedge a + 1 > 0$ **auflösen, a** $\rightarrow -1 < a < 1$

Es existieren Extrempunkte, falls gilt: $-1 < a < 1$

Teilaufgabe 2.2 (9 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_1 unendlich viele Terrassenpunkte besitzt. Berechnen Sie dann deren Koordinaten. Zeichnen Sie den Gaphen von f_1 für $-\pi \le x \le 2 \cdot \pi$.

$f_1(x) = f(x) \qquad f(x) := x + \sin(x)$

$f'(x) = 1 + \cos(x)$

$f''(x) = -\sin(x)$

Waagrechte Tangenten:

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \cos(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(x) = -1$

$\Leftrightarrow \quad x_0 = \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$ mit $k \in Z$

Das sind alle ganzzahligen, aber ungeradzahligen Vielfachen von π.

Wendepunkte:

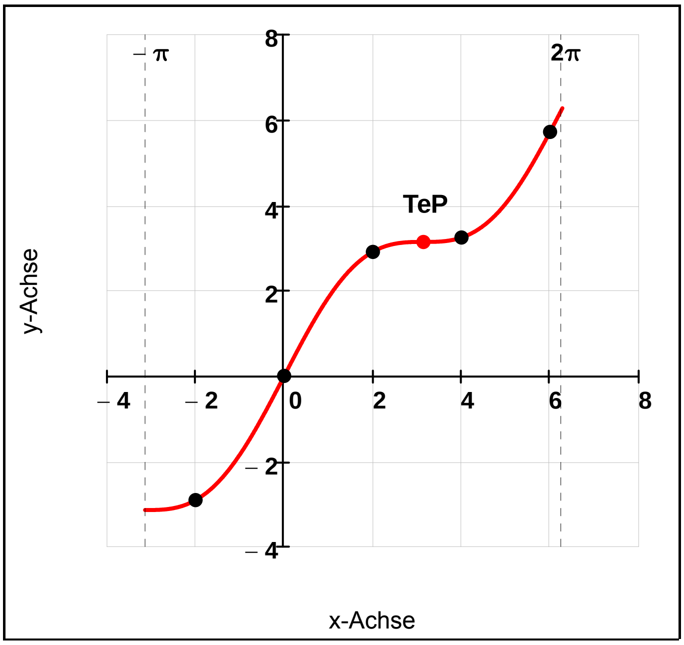
$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sin(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = k \cdot \pi$

Das sind alle ganzzahligen Vielfachen von π, einfache Nullstellen.

Terrassenpunkte: $x_0 = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$

$$f[(2 \cdot k + 1) \cdot \pi] = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi + \sin[(2 \cdot k + 1) \cdot \pi] = (2 \cdot k + 1) \cdot \pi$$

TeP ($(2 \cdot k + 1) \cdot \pi$ / $(2 \cdot k + 1) \cdot \pi$)



$x_d =$	$f(x_d) =$
-2	-2.9
0	0
2	2.9
4	3.2
6	5.7

Teilaufgabe 2.3 **(8 BE)**

Berechnen Sie das Integral $\pi \cdot \int_0^{\pi} (f_1(x))^2 \, dx$ und veranschaulichen Sie den Ergebniswert mit ihrer Darstellung aus 2.2.

$$\pi \cdot \int_0^{\pi} (f_1(x))^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^{\pi} (x + \sin(x))^2 \, dx$$

Bestimmung der Stammfunktion:

$$\int (x + \sin(x))^2 \, dx = \int \left[x^2 + 2 \cdot x \cdot \sin(x) + (\sin(x))^2\right] dx$$

Partielle Integration:

$u(x) = 2 \cdot x$ $\qquad$ $u'(x) = 2$

$v'(x) = \sin(x)$ $\qquad$ $v(x) = -\cos(x)$

$$\int 2\cdot x\cdot \sin(x)\,dx = -2\cdot x\cdot \cos(x) + 2\cdot \int \cos(x)\,dx = -2\cdot x\cdot \cos(x) + 2\cdot \sin(x)$$

Additionstheorem:

$$\int (\sin(x))^2\,dx = \int \frac{1}{2}\cdot(1-\cos(2\cdot x))\,dx = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot \sin(2\cdot x)\right) = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot \sin(2\cdot x)$$

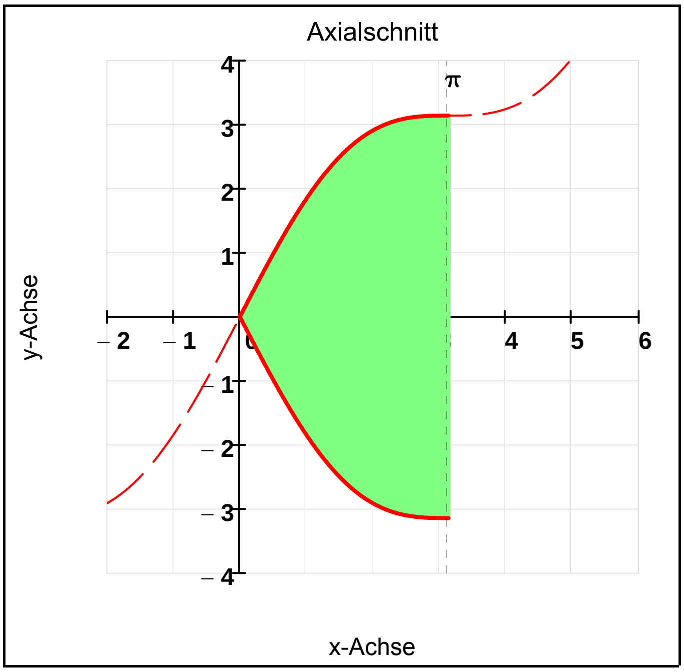
Einsetzen:

$$\pi\int (x+\sin(x))^2\,dx = \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - 2\cdot x\cdot \cos(x) + 2\cdot \sin(x) + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot \sin(2\cdot x)\right)$$

Stammfunktion: $F(x) := \pi\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot x^3 - 2\cdot x\cdot \cos(x) + 2\cdot \sin(x) + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{4}\cdot \sin(2\cdot x)\right)$

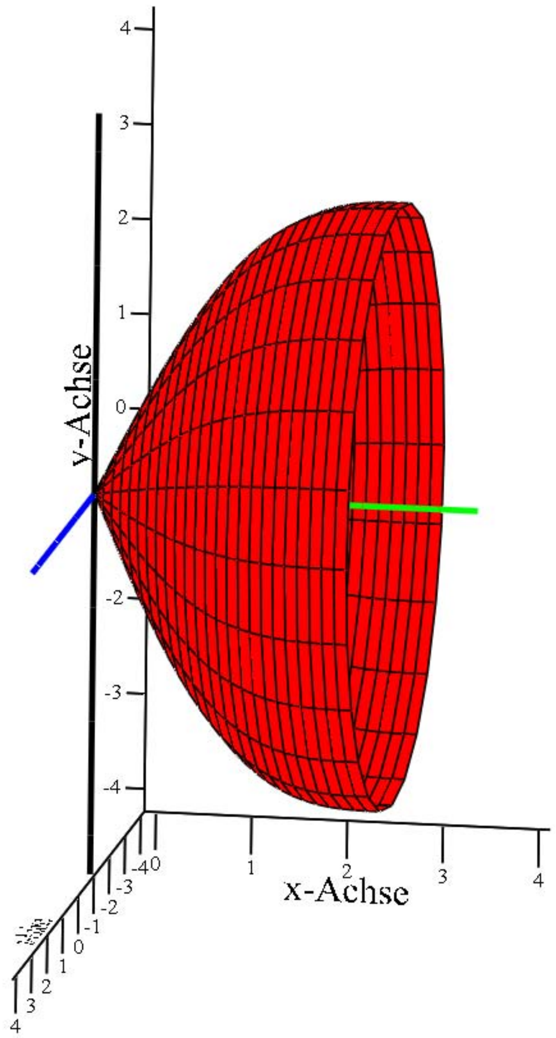
$$F(\pi) - F(0) = \pi\cdot\left(\frac{5\cdot\pi}{2} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{5\cdot\pi^2}{2} + \frac{\pi^4}{3} = 57.14$$

57.14 ist die Maßzahl des Volumeninhalts des Körpers, der durch Rotation des Graphen von f_1 von 0 bis π um die x-Achse entsteht.



Definitionen

Rotationskörper in 3D-Darstellung



Teilaufgabe 3
Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differentialgleichung:
$N'(t) = 0.1 \cdot N(t) \cdot (5 - N(t))$.
N(t) umfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t \geq 0$.
Dabei gilt: $0 < N(0) < 4.5$.

Teilaufgabe 3.1 (10 BE)
Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}$]

Gegebene DGL: $N' = 0.1 \cdot N \cdot (5 - N)$

Differentialquotient: $\dfrac{dN}{dt} = 0.1 \cdot N \cdot (5 - N)$

Trennen der Variablen: $\dfrac{dN}{N \cdot (5 - N)} = 0.1$

Integration: $\displaystyle\int \frac{1}{N \cdot (5 - N)}\, dN = \int 0.1\, dt$

Partialbruchzerlegung: $\dfrac{1}{N \cdot (5 - N)} = \dfrac{A}{N} + \dfrac{B}{5 - N} = \dfrac{A \cdot (5 - N) + B \cdot N}{N \cdot (5 - N)} = \dfrac{5 \cdot A + (B - A) \cdot N}{N \cdot (5 - N)}$

Koeffizientenvergleich: $5 \cdot A = 1 \quad \Rightarrow \quad A = \dfrac{1}{5}$

$B - A = 0 \quad \Rightarrow \quad B = A = \dfrac{1}{5}$

$$\int \left(\frac{\frac{1}{5}}{N} + \frac{\frac{1}{5}}{5 - N} \right) dN = \int 0.1\, dt \quad \Leftrightarrow \quad \int \left(\frac{1}{N} + \frac{1}{5 - N} \right) dN = \int 0.5\, dt$$

Integration: $\ln(|N|) - \ln(|5 - N|) = 0.5 \cdot t + k$

Betrag weglassen, da $0 < N < 4.5$

Logarithmus zusammenfassen: $\ln\left(\dfrac{N}{5 - N}\right) = 0.5 \cdot t + k$

Delogarithmieren $\frac{N}{5-N} = e^{0.5 \cdot t+k}$

Nach N auflösen:

$\Leftrightarrow \quad N = 5 \cdot e^{0.5 \cdot t+k} - N \cdot e^{0.5 \cdot t+k} \quad \Leftrightarrow \quad N\left(1 + e^{0.5 \cdot t+k}\right) = 5 \cdot e^{0.5 \cdot t+k}$

$\Leftrightarrow \quad N(t) = \frac{5 \cdot e^{0.5 \cdot t+k}}{1 + e^{0.5 \cdot t+k}} = \frac{5 \cdot K \cdot e^{0.5 \cdot t}}{K \cdot e^{0.5 \cdot t} + 1}$ mit $K = e^k$

Anfangsbedingung einsetzen $N(0) = N_0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5 \cdot K \cdot e^0}{K \cdot e^0 + 1} = N_0$

Nach K auflösen: $5K = N_0 \cdot (K + 1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(5 - N_0\right) \cdot K = N_0$

$\Leftrightarrow \quad K = \frac{N_0}{5 - N_0}$

In Lösung einsetzen: $N(t) = \frac{5 \cdot \frac{N_0}{5 - N_0} \cdot e^{0.5 \cdot t}}{\frac{N_0}{5 - N_0} \cdot e^{0.5 \cdot t} + 1}$

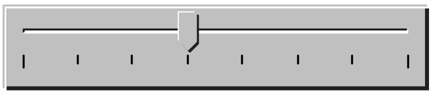
Vereinfachen. $N(t) = \frac{5 \cdot \frac{N_0}{5 - N_0} \cdot e^{0.5 \cdot t}}{\frac{N_0}{5 - N_0} \cdot e^{0.5 \cdot t} + 1} \cdot \frac{5 - N_0}{5 - N_0} = \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0}$

Endgültige Lösung: $\boxed{N(t) = \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0}}$

Teilaufgabe 3.2 **(5 BE)**
Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differentialgleichung für $N(0) = N_0$.

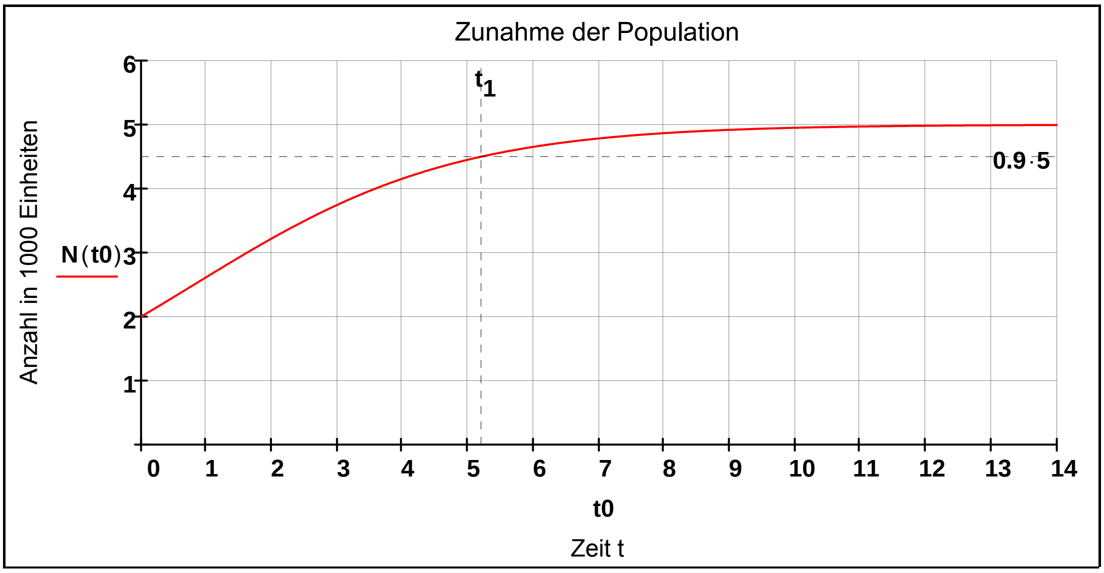
[Mögliches Ergebnis: $N(t) = \dfrac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{5 - N_0 + N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}$]

Anzahl der Pflanzen in 1000 Individuen:



Anfangswert $N_0 = 2$ mal 1000

$$N(t) := \frac{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0} \qquad t_1 := 2 \cdot \ln\left(\frac{45 - 9 \cdot N_0}{N_0}\right) \qquad t_1 = 5.205$$



$$\lim_{t \to \infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{5 \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t} + 5 - N_0}}\right) = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{\frac{5}{2} \cdot N_0 \cdot e^{0.5 \cdot t}}{\frac{N_0}{2} \cdot e^{0.5 \cdot t}}\right) = \lim_{t \to \infty} (5) = 5$$

Der Endwert nach langer Zeit sind 5000 Individuen, unabhängig von der Anzahl der Individuen N_0.

$$0.9\cdot 5 = \frac{5\cdot N_0\cdot e^{0.5\cdot t_1}}{N_0\cdot e^{0.5\cdot t_1} + 5 - N_0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \qquad \left(4.5\cdot N_0 - 5\cdot N_0\right)\cdot e^{0.5\cdot t_1} = 4.5\cdot\left(N_0 - 5\right) \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{0.5\cdot t_1} = \frac{4.5\cdot\left(N_0 - 5\right)}{(-0.5)\cdot N_0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad e^{0.5\cdot t_1} = \frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0.5\cdot t_1 = \ln\left(\frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0}\right)$$

$$t_1 := 2\cdot\ln\left(\frac{45 - 9\cdot N_0}{N_0}\right) \qquad t_1 = 5.205$$