

Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2005

• Mathematik 13 Technik - B II - Lösung



Aufgabe 1.0

Herr A muss beruflich einen PC nutzen. Er hat sich angewöhnt, nach Ende der Arbeitszeit immer noch schnell ein Computerspiel zu spielen. Ein Überblick über seinen Spielerfolg ist ihm auf Grund der im Spiel integrierten Statistik möglich.

$$\begin{pmatrix} n & 500 & 1000 & 1500 & 2000 \\ k_n & 42 & 93 & 156 & 218 \end{pmatrix}$$

Die Tabelle zeigt die absolute Häufigkeit k_n der gewonnenen Spiele in Abhängigkeit von der Anzahl n der bereits gespielten Spiele.

Aufgabe 1.1 (4 BE)

Herr A möchte auf der Basis der relativen Häufigkeit die Wahrscheinlichkeit p für den Gewinn eines Spiels ermitteln. Nach der Berechnung der relativen Häufigkeit für jeweils 500 Spiele kommt Herr A zu dem Schluss, dass er als Gewinnwahrscheinlichkeit den Wert $p = 0.125$ verwenden sollte. Legen Sie detailliert dar, warum Vorgehen und Entscheidung von Herrn A sinnvoll sind.

Nach dem Gesetz der großen Zahlen lässt sich die relative Häufigkeit als Wahrscheinlichkeit interpretieren.

Relative Häufigkeit für jeden Block von 500 Spielen:

$$h_n := \left(\frac{42}{500} \quad \frac{93 - 42}{500} \quad \frac{156 - 93}{500} \quad \frac{218 - 156}{500} \right) \quad h_n = (0.084 \quad 0.102 \quad 0.126 \quad 0.124)$$

Der Anstieg kann auf einen Trainingseffekt zurückgeführt werden, der ab $n = 1000$ abgeschlossen erscheint. Ab $n = 1000$ liegen also gleiche Versuchbedingungen vor und die rel. Häufigkeit des zweiten 1000er-Blocks kann als Gewinnwahrscheinlichkeit aufgefasst werden.

$$p := \frac{218 - 93}{1000} \quad p = 0.125$$

Aufgabe 1.2 (7 BE)

Ermitteln Sie ausgehend von der Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 0.125$ die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

E: In den nächsten zehn Spielen gewinnt Herr A genau zwei Spiele und diese hintereinander.

F: In den nächsten zehn Spielen gewinnt Herr A genau drei Spiele, wobei er im letzten Spiel das dritte Mal gewinnt.

G: In den nächsten zehn Spielen gewinnt Herr A genau drei Spiele, wobei er zwei Spiele in den ersten fünf Spielen gewinnt und ein Spiel in den letzten fünf Spielen.

GGxxxxxxxx

xGGxxxxxxxx

xxGGxxxxxxxx

xxxGGxxxxx

xxxxGGxxxx

xxxxxGGxxx

xxxxxxGGxx

xxxxxxxGGx

xxxxxxxxGG

9 Möglichkeiten

$$P(E) = 9 \cdot 0.125^2 \cdot 0.875^8 = 0.4832$$

$$P(F) = \binom{9}{2} \cdot 0.125^2 \cdot 0.875^7 \cdot 0.125 = 36 \cdot 0.125^2 \cdot 0.875^7 \cdot 0.125 = 0.02761$$

$$P(G) = \binom{5}{2} \cdot 0.125^2 \cdot 0.875^5 \cdot \binom{5}{1} \cdot 0.125^1 \cdot 0.875^4 = 10 \cdot 0.125^2 \cdot 0.875^5 \cdot 5 \cdot 0.125^1 \cdot 0.875^4 = 0.02936$$

Aufgabe 1.3 (6 BE)

Herrn A interessiert nun die Anzahl k der gewonnenen Spiele, wenn er tausend Spiele durchführt. Ermitteln Sie unter Verwendung der Ungleichung von Tschebyschow einen möglichst kleinen Bereich, in dem k mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% liegen wird, wenn die angenommene Gewinnwahrscheinlichkeit $p = 0.125$ tatsächlich zutreffen sollte.

$$n := 1000 \quad p := 0.125 \quad \mu := n \cdot p = 125 \quad \text{Var}(X) = n \cdot p \cdot q$$

$$\text{Ungleichung:} \quad P(|X - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

$$\text{Gegeben:} \quad P(|X - 125| \geq \epsilon) \leq 0.05$$

$$\text{Koeffizientenvergleich:} \quad \frac{n \cdot p \cdot (1 - p)}{\epsilon^2} = 0.05$$

$$\text{Auflösen:} \quad \epsilon^2 = \frac{n \cdot 0.125 \cdot 0.875}{0.05} \quad \epsilon := \sqrt{\frac{n \cdot 0.125 \cdot 0.875}{0.05}} \quad \epsilon = 46.771$$

$$P(|X - 125| \leq \epsilon) \leq 1 - \frac{\text{Var}(X)}{\epsilon^2} \Leftrightarrow |X - 125| \leq 46$$

Anzahl der gewonnenen Spiele:

$$125 - 46 \leq X \leq 125 + 46 \rightarrow 79 \leq X \leq 171$$

Aufgabe 1.4 (4 BE)

Berechnen Sie, wie groß die Gewinnwahrscheinlichkeit mindestens sein müsste, damit Herr A von zehn Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 95% mindestens ein Spiel gewinnt.

$$P(X \geq 1) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.05$$

$$\binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot (1 - p)^{10} \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - p)^{10} \leq 0.05 \quad 1 - p = \sqrt[10]{0.05}$$

$$p := 1 - \sqrt[10]{0.05} \quad p = 0.259 \quad \mathbf{p \geq 0.259}$$

Aufgabe 2.0

Ein Tennis-Club ist wegen bestehender Sponsorenverträge verpflichtet, seine Bälle bei den drei Herstellern X, Y und Z einzukaufen. Ein gewisser Prozentsatz der Bälle eines jeden Herstellers zeigt auf Grund von Produktionsmängeln ein schlechtes Sprungverhalten. Die Erfahrung hat gezeigt, dass 3% der Bälle von X, 8% von Y und 6% von Z ein schlechtes Sprungverhalten aufweisen.

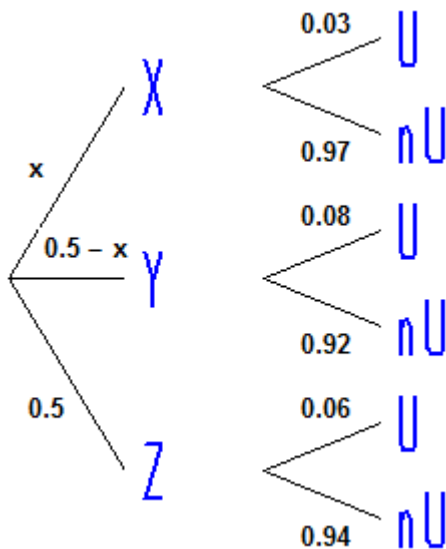
Aufgabe 2.1 (6 BE)

Der Club ist bestrebt, so einzukaufen, dass die Bälle mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% ein korrektes Sprungverhalten besitzen. Ermitteln Sie, welcher Prozentsatz der Bälle unter dieser Vorgabe bei den Herstellern X und Y bestellt werden muss, wenn 50% der Bälle der Hersteller Z liefert.

Der Ball kommt von Hersteller X, Y oder Z

U: Der Ball zeigt schlechtes Sprungverhalten.

$p_{XU} := 0.03$ $p_{YU} := 0.08$ $p_{ZU} := 0.06$



$$P(\bar{U}) = P(nU) = x \cdot 0.97 + (0.5 - x) \cdot 0.92 + 0.5 \cdot 0.94$$

$$P(\bar{U}) \geq 0.95$$

$$x \cdot 0.97 + (0.5 - x) \cdot 0.92 + 0.5 \cdot 0.94 \geq 0.95 \text{ auflösen, } x \rightarrow 0.4 \leq x < \infty$$

Damit bestellt man 40% der Bälle bei Hersteller X und 10% der Bälle bei Hersteller Y.

Aufgabe 2.2 (3 BE)

Gehen Sie ab nun davon aus, dass 95% der Bälle ein korrektes Sprungverhalten zeigen. Gehen Sie ferner davon aus, dass 40 Prozent der Bälle vom Hersteller X und 50% der Bälle vom Hersteller Z geliefert wurden. Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Ereignisse

A: Der Ball stammt nicht von Hersteller Y und

B: Der Ball zeigt ein korrektes Sprungverhalten
stochastisch unabhängig sind.

$$P(Y) = 0.5 - 0.4 = 0.1 \quad \Rightarrow \quad P(\bar{Y}) = 0.9$$

$$P(A) = P(\bar{Y}) \cdot P(\bar{U}) = 0.9 \cdot 0.95 = 0.855$$

$$P(\bar{Y} \cap \bar{U}) = P(X \cap \bar{U}) + P(Z \cap \bar{U}) = 0.4 \cdot 0.97 + 0.5 \cdot 0.94 = 0.858$$

Die beiden Ereignisse \bar{Y} und \bar{U} sind stochastisch abhängig.

Aufgabe 3 (10 BE)

Eine Schule hat zur Erfassung der Anwesenheit ihrer Schüler ein Chip-System installiert. Jeder Schüler muss nun beim Betreten bzw. Verlassen der Schule ein- bzw. auschecken, indem er einen Chip an einen Sensor vorbeiführt. Es besteht jedoch die Möglichkeit, dass ein Schüler dem Unterricht fernbleibt, seine Anwesenheit aber dadurch sicherstellt, dass er seinen Chip einem Mitschüler zum Ein- und Auschecken mitgibt. Die Schule möchte durch ab und zu durchgeführte Test überprüfen, ob als anwesend erfasste Schüler auch wirklich im Unterricht sind. Man nimmt an, dass höchstens 10% der als anwesend erfassten Schüler nicht in der Schule sind. Die Annahme soll auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden, indem die tatsächliche Anwesenheit von 120 zufällig ausgewählten Schülern überprüft wird. Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für diesen Test. Berechnen Sie sodann, wie groß das Risiko 1. Art bezüglich ihrer Entscheidungsregel tatsächlich ist.

X: Tatsächliche Anwesenheit von $n := 120$ zufällig ausgewählten Schülern. $p := 0.10$

$$H_0: \quad p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.1 \quad H_1: \quad p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.1$$

Testart: Rechtsseitiger Signifikanztest

$$A = \{ 0, 1, \dots, k \} \quad \bar{A} = \{ k + 1, k + 2, \dots, 120 \}$$

$$\mu := n \cdot p = 12 \quad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 3.286 \quad \text{Näherung mit NV}$$

$$P(\bar{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq k + 1) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \leq 0.05$$

$$\Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.95$$

$$\text{TW} \quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 1.645 \quad k := 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5 = 16.906$$

auf runden: **k := 17**

Entscheidungsregel:

Die Vermutung, dass höchstens 10% der als anwesend erfassten Schüler nicht in der Schule sind, wird akzeptiert, falls von den 120 erfassten Schülern weniger als 18 nicht in der Schule sind.

Risiko 1. Art:

$$\alpha = P(\bar{A}) = P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17) = 1 - \Phi\left(\frac{17 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) = 1 - \Phi(1.67) = 1 - 0.953 = 0.047$$