Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion **f** mit dem Funktionsterm $f(x) := x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = \left]\, 0\,;\, \infty \,\right[$.

Teilaufgabe 1.1 **(6 BE)**
Berechnen Sie die Nullstelle von **f** und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte **f(x)** an den Rändern der Definitionsmenge.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

keine Lösung

Nullstelle: $x_0 := 4$

L. Hosp.

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\overset{\substack{-\infty \\ \uparrow}}{\ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\frac{1}{x^2}}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{4 \cdot x}}{\frac{-2}{x^3}} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x^2}{-2} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{x^2} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)} \right) \rightarrow \infty$$

Teilaufgabe 1.2 **(6 BE)**
Berechnen Sie die Art und die exakten Koordinaten des Extrempunktes des Graphen von **f** .
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = x \cdot (1 + 2 \cdot \ln(0.25x))$]

$$f'(x) = 2 \cdot x \cdot \ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) + x^2 \cdot \frac{\frac{1}{4}}{\frac{x}{4}} = 2 \cdot x \cdot \ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) + x = x \cdot \left(2 \cdot \ln\left(\frac{1}{4} \cdot x\right) + 1 \right)$$

Mathcad-Berechnung: $f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \rightarrow x + 2 \cdot x \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) \text{ Faktor } \rightarrow x \cdot \left(2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 1 \right)$

Horizontale Tangenten:

$$f'(x) = 0 \rightarrow x\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+1\right) = 0 \;\left|\; \begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{annehmen}, x > 0\end{array}\right. \rightarrow 4\cdot e^{-\frac{1}{2}}$$

$x_E := 4\cdot e^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad x_E = 2.4 \qquad$ $x > 0 \Rightarrow \; 2\cdot\ln\left(\frac{1}{4}\cdot x\right)+1$ bestimmt das Vorzeichen

		$x \neq 0$		$x = 4\cdot e^{-\frac{1}{2}}$	
f '	nicht def	|	neg	|	pos
G_f		|	smf	|	sms
				TP	

$y_E := f(x_E) = -8\cdot e^{-1} = -2.943$

Tiefpunkt:

$TP\left(4\cdot e^{-\frac{1}{2}}, -8\cdot e^{-1}\right)$

Teilaufgabe 1.3 **(7 BE)**
Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten des Graphen von **f** und berechnen Sie die exakten Koordinaten des Wendepunktes.

Zur Erinnerung: $\qquad f'(x) = x\cdot\left(2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+1\right)$

$$f''(x) = 1 + 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right) + 2\cdot x\cdot\frac{1}{x} = 3 + 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)$$

Mathcad-Berechnung: $\qquad f''(x) := \frac{d}{dx}f'(x) = 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+3$

$$x_W := f''(x) = 0 \rightarrow 2\cdot\ln\left(\frac{x}{4}\right)+3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 4\cdot e^{-\frac{3}{2}}$$

Wendestelle, da Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

		$x \neq 0$		$x = 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}$	
f ''	nicht def		neg		pos
G_f			rk	WP	lk

$x_W = 0.9$

$y_W := f(x_W) = -24 \cdot e^{-3} = -1.2$

Wendepunkt:

$WP\left(4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}, -24 \cdot e^{-3}\right)$

Teilaufgabe 1.4 **(7 BE)**
Lösen Sie die Gleichung **f(x)** = **2.5** mithilfe des Newtonschen Verfahrens, benutzen Sie $x_0 = 4.5$ als Startwert, führen Sie einen Näherungsschritt durch und runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

Differenzfunktion: $d(x) := f(x) - \frac{5}{2} \rightarrow x^2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{5}{2}$

Ableitung: $d'(x) := \frac{d}{dx} d(x) \rightarrow x + 2 \cdot x \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right)$

Startwert: $x_0 := \frac{9}{2}$

$x_1 := x_0 - \frac{d(x_0)}{d'(x_0)}$ $\quad$ $x_1 = 4.52$

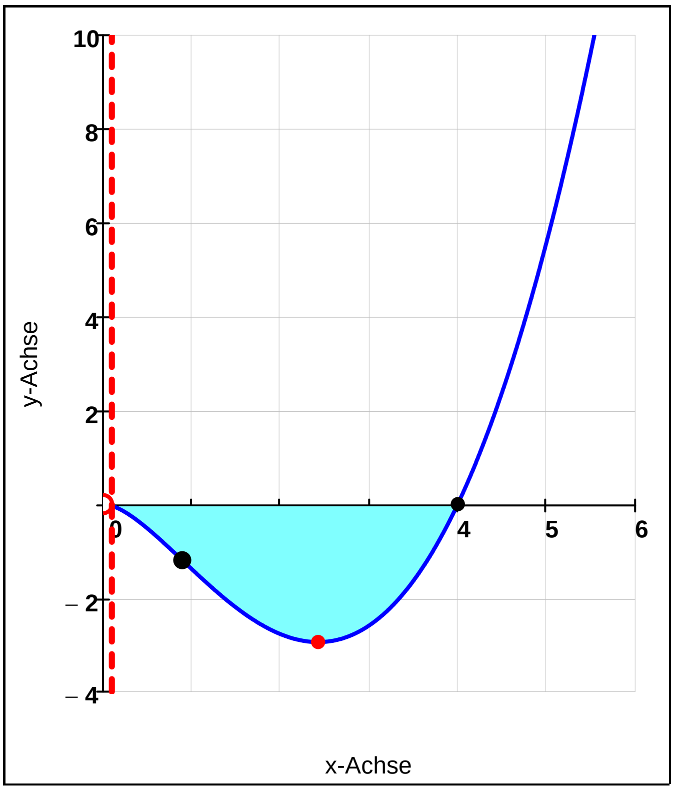
Teilaufgabe 1.5 (4 BE)
Berechnen Sie den rechtsseitigen Grenzwert der Ableitungsfunktion **f '** an der Stelle $x = 0$ und beschreiben Sie die Bedeutung des Ergebnisses für den Verlauf des Graphen von **f**.

$$\lim_{x \to 0^+} \left[\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{x} \cdot \left(1 + 2 \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ -\infty}}{\ln\left(\frac{x}{4}\right)} \right) \right] = \lim_{x \to 0^+} \left[\frac{\overset{\substack{-\infty \\ \uparrow}}{\left(1 + 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right)\right)}}{\underset{\substack{\downarrow \\ \infty}}{\left(\frac{1}{x}\right)}} \right] \overset{\text{L. Hosp.}}{=} \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{2}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right)$$

$$\ldots = \lim_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{(-2 \cdot x)} = 0$$

Der Graph mündet von rechts mit einer horizontalen Tangente in den Rand x = 0 ein.

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Zeichnen Sie mithilfe bisheriger Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen von **f** für $0 < x \leq 5$ in ein kartesisches Koordinatensystem (Maßstab: 1 LE = 1 cm).



$x_d := 0.5, 1 .. 5$

$x_d =$	$f(x_d) =$
0.5	-0.5
1	-1.4
1.5	-2.2
2	-2.8
2.5	-2.9
3	-2.6
3.5	-1.6
4	0
4.5	2.4
5	5.6

Teilaufgabe 1.7 (2 BE)

Gegeben ist nun die Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \left(\ln(0.25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right)$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$. Zeigen Sie, dass **F** eine Stammfunktion von **f** ist.

zu zeigen: $F'(x) = f(x)$

$$F'(x) = \frac{1}{3} 3 \cdot x^2 \cdot \left(\ln(0.25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \frac{1}{0.25 \cdot x} \cdot 0.25$$

$$\ldots = x^2 \cdot \left(\ln(0.25 \cdot x) - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot x^2 = x^2 \cdot \ln(0.25 \cdot x) = f(x)$$

Teilaufgabe 1.8 (5 BE)

Der Graph von **f**, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 0.1$ schließen rechts der Geraden ein Flächenstück A ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück im Schaubild der Aufgabe 1.6 und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
Runden Sie das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$$F(x) := \frac{1}{3} \cdot x^3 \cdot \left(\ln\left(\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{3} \right) \qquad A := -\int_{0.1}^{4} f(x)\,dx$$

$$A = -\int_{0.1}^{4} f(x)\,dx = -(F(4) - F(0.1))$$

$$F(4) = -\frac{64}{9} \qquad F\left(\frac{1}{10}\right) = -\frac{\ln(40)}{3000} - \frac{1}{9000} \qquad A = 7.11$$

Teilaufgabe 2.0
Die Geschwindigkeit **v** (in m/s) eines Fallschirmspringers bei ungeöffnetem Fallschirm kann näherungsweise durch die Funktion **v** mit $v(t) := 60\cdot\dfrac{e^{\frac{t}{3}}-1}{e^{\frac{t}{3}}+1}$ und $t \geq 0$ beschrieben werden.
Dabei bezeichnet t die Zeit (in Sekunden) nach dem Absprung.
Auf das Mitführen der Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.
Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Berechnen Sie, welche Geschwindigkeit der Fallschirmspringer nach 5 Sekunden besitzt und nach welcher Zeit er die Geschwindigkeit 55 m/s erreicht.

[Hinweis: Benutzen Sie die Substitution $u = e^{\frac{t}{3}}$]

$$v(5) = \frac{60\cdot e^{\frac{5}{3}}-60}{e^{\frac{5}{3}}+1} \qquad \boxed{v(5) = 40.9}$$

$$v(t) = 55 \rightarrow \frac{60\cdot e^{\frac{t}{3}}-60}{e^{\frac{t}{3}}+1} = 55 \quad\Leftrightarrow\quad 60\cdot e^{\frac{t}{3}} - 60 = 55\cdot\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5\cdot e^{\frac{t}{3}} = 115 \quad\Leftrightarrow\quad e^{\frac{t}{3}} = 23 \qquad t_{55} := 3\cdot\ln(23) \qquad \boxed{t_{55} = 9.406}$$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Weisen Sie nach, dass die Geschwindigkeit **v** streng monoton zunimmt. Berechnen Sie außerdem den Grenzwert $\lim_{t \to \infty} v(t)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für den Fallschirmspringer.

[Mögliches Teilergebnis: $v'(t) = 40\cdot\dfrac{e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}$]

$$v'(t) = 60\cdot e^{\frac{t}{3}}\cdot\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)-\left(e^{\frac{t}{3}}-1\right)\cdot e^{\frac{t}{3}}\cdot\frac{1}{3}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2} = 20\cdot\frac{e^{\frac{t}{3}}\cdot 2}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2} = 40\cdot\frac{e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}$$

Feste Definition:

$$v'(t) := 40 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2}$$

$v'(t) > 0$ für alle t

$\Rightarrow$ Die Geschwindigkeit ist streng monoton zunehmend

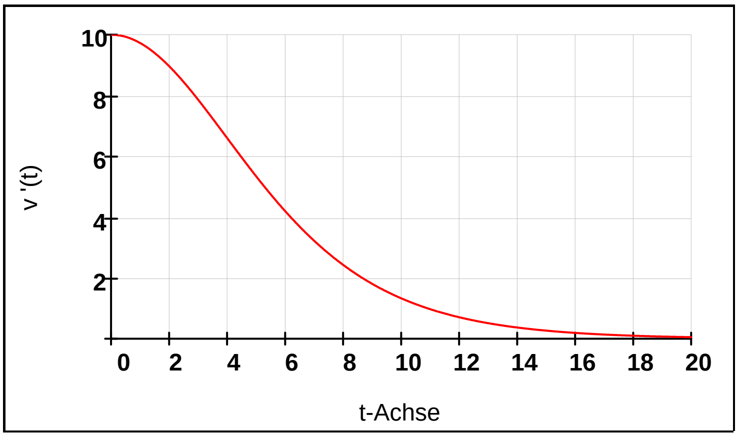
$$\lim_{t \to \infty} \left(60 \cdot \frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{e^{\frac{t}{3}}} - 1}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{\frac{t}{3}}} + 1} \right) = \lim_{t \to \infty} \left(60 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{e^{\frac{t}{3}} \cdot \frac{1}{3}} \right) = 60 \quad \Rightarrow \quad v_0 = 60 \text{ horizontale Asymptote}$$

Die Geschwindigkeit des Fallschirmspringers nähert sich mit zunehmender Zeit 60 m/s, erreicht sie jedoch nie

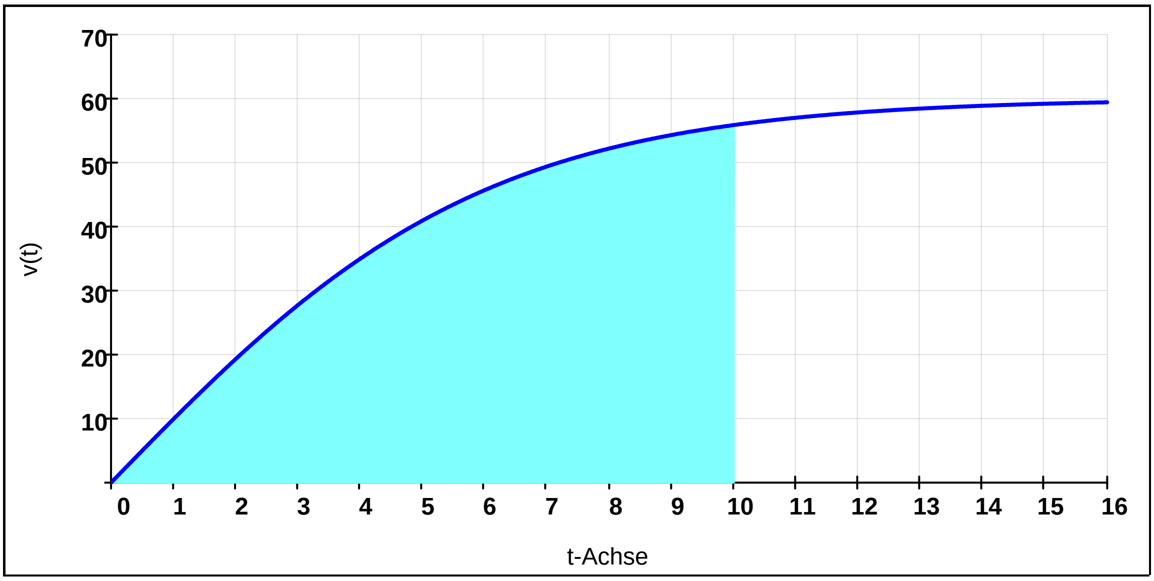
Teilaufgabe 2.3 **(4 BE)**
Während des gesamten Sprungs mit ungeöffnetem Fallschirm gilt: $v''(t) < 0$ (Nachweis nicht erforderlich).
Begründen Sie, dass die Ableitungsfunktion $v'(t)$ die Wertemenge $W =]\,0;\,10]$ besitzt.

$v''(t) < 0 \quad \Rightarrow \quad v(t)$ ist rechtsgekrümmt

$$\lim_{t \to 0^+} \left[40 \cdot \frac{e^{\frac{t}{3}}}{\left(e^{\frac{t}{3}}+1\right)^2} \right] \to 10 \qquad \lim_{t \to \infty} v'(t) \to 0 \quad \Rightarrow \quad W =]\,0\,;\,10]$$



Teilaufgabe 2.4 **(3 BE)**
Stellen Sie die Funktion **v** für $0 \le t \le 16$ graphisch dar. Wählen Sie dazu selbst einen geeigneten Maßstab.



Teilaufgabe 2.5 **(7 BE)**

Zeigen Sie, dass die Funktion $s(t) := 360 \ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}} + e^{\frac{-t}{6}}}{2}\right)$ mit $t \ge 0$ eine Stammfunktion von **v** ist, die $s(0) = 0$ erfüllt. Berechnen Sie **s(10)**, geben Sie die Bedeutung dieses Wertes für den Fallschirmspringer an und kennzeichnen Sie den Wert im Schaubild der Aufgabe 2.4.

zu zeigen: $\frac{d}{dt}(s(t) = v(t))$

$$s'(t) = \frac{d}{dt} 360 \ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}} + e^{\frac{-t}{6}}}{2}\right) = -\frac{360 \cdot \left(\frac{e^{-\frac{t}{6}}}{12} - \frac{e^{\frac{t}{6}}}{12}\right)}{\frac{e^{-\frac{t}{6}}}{2} + \frac{e^{\frac{t}{6}}}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{t}{6}}}{e^{\frac{t}{6}}} = -60 \cdot \frac{\left(1 - e^{\frac{t}{3}}\right)}{\left(1 + e^{\frac{t}{3}}\right)} = 60 \cdot \frac{\left(e^{\frac{t}{3}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{t}{3}} + 1\right)}$$

$s(0) = 0$ $\qquad$ $s(10) = 363.1$

$$\int_0^{10} v(t)\, dt = s(10) - s(0) = 363.1$$

Der in den ersten 10 Sekunden durchfallene Höhenunterschied beträgt 361,1m, das entspricht der Schraffur in der Graphik von2.4

Teilaufgabe 2.6 (7 BE)
Der Fallschirmspringer ist in 4000 Meter Höhe abgesprungen. In 1000 Meter Höhe öffnet er den Fallschirm. Berechnen Sie näherungsweise die Zeit zwischen Absprung und Fallschirmöffnung.

Ersetzen Sie dazu zunächst in **s(t)** aus 2.5.den Term $e^{\frac{-t}{6}}$ durch **0** und begründen Sie danach, warum das hier zulässig ist.

$$s(t) = 360\ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}} + e^{\frac{-t}{6}}}{2}\right)$$ wird zu $$s_{neu}(t) := \left(360\ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}}}{2}\right)\right)$$

$$360\ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}}}{2}\right) = 4000 - 1000 = 3000 \qquad \ln\left(\frac{e^{\frac{t}{6}}}{2}\right) = \frac{3000}{360} = \frac{25}{3}$$

$$e^{\frac{t}{6}} = 2\cdot e^{\frac{25}{3}} \qquad t_0 := 6\cdot\ln\left(2\cdot e^{\frac{25}{3}}\right) \qquad t_0 = 54.2$$

$$e^{\frac{-t_0}{6}} = 1.2\times 10^{-4}$$ ist sehr klein, also nahezu 0