Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 ist die menge dee Ebenen

$E_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix}$ mit $\lambda, \mu, a \in IR$ gegeben, außerdem die Menge der Punkte $C_{k,m}(2 \cdot k - 3 \cdot m - 1 / \ m - 3 / \ -k + m + 4)$ mit $k, m \in IR$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene F in Koordinatenform, auf der alle Punkte $C_{k,m}$ liegen.

[Mögliches Ergebnis: $F\!: x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 4 = 0$]

Punkt $C_{k,m}$:

$$x_F(k,m) = \begin{pmatrix} 2 \cdot k - 3 \cdot m - 1 \\ m - 3 \\ -k + m + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das ist eine Ebene

Normalenvektor:

$$n_F := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad n_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenform: Koordinatenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \cdot n_F = 0 \rightarrow x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 4 = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Ebene F auch in der Menge der Ebenen E_a enthalten ist.

Ebene F:

$$F(x_1, x_2, x_3) := x_1 + x_2 + 2 \cdot x_3 - 4$$

Ebene E:

$$x_E(\lambda, \mu, a) := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \mu - \lambda + 2 \\ \lambda + a \cdot \mu \\ \mu \cdot (a+1) + 1 \end{bmatrix}$$

$E \cap F$:

$(a\cdot\mu - \lambda + 2) + (\lambda + a\cdot\mu) + 2\cdot[\mu\cdot(a+1) + 1] - 4 = 0$ vereinfachen $\rightarrow 2\cdot\mu\cdot(2\cdot a + 1) = 0$

$2\cdot\mu\cdot(2\cdot a + 1) = 0 \qquad \mu \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\cdot a + 1 = 0$ auflösen, $a \rightarrow -\frac{1}{2}$

Für $a = -0.5$ gilt: $E \equiv F$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Die Ebene F schneide die x_1-Achse im Punkt S_1 und die x_2-Achse im Punkt S_2.
Diese Punkte bilden mit dem Koordinatenursprung und dem Punkt P(1/1/1) eine dreiseitige Pyramide. Berechnen Sie die Volumenmaßzahl dieser Pyramide.

$F(x_1, 0, 0) = 0 \rightarrow x_1 - 4 = 0$ auflösen, $x_1 \rightarrow 4 \qquad \Rightarrow \qquad S_1 := (4 \;\; 0 \;\; 0)$

$F(0, x_2, 0) = 0 \rightarrow x_2 - 4 = 0$ auflösen, $x_2 \rightarrow 4 \qquad \Rightarrow \qquad S_2 := (0 \;\; 4 \;\; 0)$

Ortsvektoren: $\quad OP := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad OS_1 := S_1^{T} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad OS_2 := S_2^{T} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$V_{Pyr} := \frac{1}{6}\cdot\left|(OS_1 \times OS_2)\cdot OP\right| \qquad \boxed{V_{Pyr} = \frac{8}{3} = 2.667}$

Teilaufgabe 1.4 (7 BE)
Es gibt zwei verschiedene Ebenen E_{a_1} und E_{a_2}, die mit der Ebene F jeweils einen Winkel von 45° einschließen. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte a_1 und a_2 auf zwei Nachkommastellen gerundet.

Normalenvektor Ebene E: $\quad n_E(a) := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a+1 \\ -2\cdot a \end{pmatrix}$

Normalenvektor Ebene F: $\quad n_F := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gegebener Winkel: $\quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{n_E(a)\cdot n_F}{|n_E(a)|\cdot|n_F|} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow -\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot(2\cdot a-2)}{12\cdot\sqrt{(|a+1|)^2+2\cdot(|a|)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot(2\cdot a-2)}{12\cdot\sqrt{(|a+1|)^2+2\cdot(|a|)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left|\begin{array}{l} \text{ersetzen}, (|a+1|)^2 = (a+1)^2 \\ \text{ersetzen}, (|a|)^2 = a^2 \end{array}\right. \rightarrow -\frac{\sqrt{3}\cdot(2\cdot a-2)}{6\cdot\sqrt{3\cdot a^2+2\cdot a+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Multiplizieren: $-2\cdot\sqrt{3}\cdot(2\cdot a-2) = 6\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3\cdot a^2+2\cdot a+1}$

Quadrieren:

$$\left[-\sqrt{3}\cdot(2\cdot a-2)\right]^2 = 9\cdot 2\cdot\left(3\cdot a^2+2\cdot a+1\right) \text{ vereinfachen } \rightarrow 12\cdot(a-1)^2 = 54\cdot a^2+36\cdot a+18$$

vereinfacht: $a0 := 7\cdot a^2+10\cdot a+1 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7}-\frac{5}{7} \\ -\frac{3\cdot\sqrt{2}}{7}-\frac{5}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.108 \\ -1.32 \end{pmatrix}$

Abrufen der Lösungen: $a_1 := a0_1$ $\quad a_2 := a0_2$

$a_1 = -0.11$ $\quad a_2 = -1.32$

Mathcad-Lösung:

$$a0 := \frac{n_E(a)\cdot n_F}{|n_E(a)|\cdot|n_F|} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \left|\begin{array}{l} \text{ersetzen}, (|a+1|)^2 = (a+1)^2 \\ \text{ersetzen}, (|a|)^2 = a^2 \\ \text{auflösen}, a \end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{3\cdot\sqrt{2}}{7}-\frac{5}{7} \\ -\frac{3\cdot\sqrt{2}}{7}-\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$

Abrufen der Lösungen: $a_1 := a0_1$ $\quad a_2 := a0_2$

$a_1 = -0.11$ $\quad a_2 = -1.32$

Teilaufgabe 1.5 (7 BE)

Zeigen Sie, dass die Gerade g mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, mit $\nu \in \mathbb{R}$, in allen Ebenen E_a enthalten ist, und berechnen Sie den Abstand des Koordinatenursprungs von dieser Geraden g mithilfe des Lotfußpunktes L.

Definition der Geraden: $\quad x_g(\nu) := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Definition der Ebene E: $\quad x_E(\lambda, \mu, a) := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a \cdot \mu - \lambda + 2 \\ \lambda + a \cdot \mu \\ \mu \cdot (a+1) + 1 \end{bmatrix}$

Der Richtungsvektor der Geraden und der 1. Richtungsvektor der Ebene sind parallel: g || E.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, \lambda, \mu \rightarrow (3 \quad 0) \qquad x_E(3, 0, a) \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Aufpunkt von g liegt in E, also liegt g in E.

$\overrightarrow{OL} \perp g$: $\quad \nu_0 := \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 2 \cdot \nu - 4 = 0 \text{ auflösen}, \nu \rightarrow 2$

Lotfußpunkt: $\quad OL := x_g(\nu_0) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L := OL^T \rightarrow (1 \quad 1 \quad 1)$

Abstand: $\quad d := |OL| = \sqrt{3} = 1.732$

Teilaufgabe 2.0 (7 BE)

In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind in Abhängigkeit von $r \in IR$ die Ebenen G_r, H_r und K_r gegeben:

$$G_r: \; x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 + 19 = 0$$

$$H_r: \; x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 7 = 0$$

$$K_r: \; -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 - 22 = 0$$

Ermitteln Sie die Werte für r, für welche die Ebenen G_r, H_r und K_r keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt bzw. unendlich viele Schnittpunkte haben.

$$\begin{pmatrix} 1 & 17 & -r & -19 \\ 1 & r-6 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & r & 22 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + 2 \cdot (\text{I})]{(\text{II}) - (\text{I})} \begin{pmatrix} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & r-23 & -2+r & 12 \\ 0 & 20 & -r & -16 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(*) \text{ falls } r \neq 23 \wedge r \neq 2]{(r-23) \cdot (\text{III}) - 20 \cdot (\text{II})} \begin{pmatrix} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & r-23 & -2+r & 12 \\ 0 & 0 & -r^2 + 3 \cdot r + 40 & 128 - 16 \cdot r \end{pmatrix}$$

(*) muss gelten, sonst keine äquivalente Termumformung

Nebenrechnungen: $(r-23) \cdot (-r) - 20 \cdot (r-2) = 3 \cdot r - r^2 + 40$

$(r-23) \cdot (-16) - 20 \cdot 12$ **erweitern** $= 128 - 16 \cdot r$

$-r^2 + 3 \cdot r + 40 = 0$ **auflösen**, $r \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \end{pmatrix}$

$128 - 16 \cdot r = 0$ **auflösen**, $r \rightarrow 8$

$$M(r) := \begin{pmatrix} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & r-23 & -2+r & 12 \\ 0 & 0 & -r^2 + 3 \cdot r + 40 & 128 - 16 \cdot r \end{pmatrix}$$ falls $r \neq 23 \wedge r \neq 2$

r = 8 $\quad M(8) = \begin{pmatrix} 1 & 17 & -8 & -19 \\ 0 & -15 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

r = –5 $\quad M(-5) = \begin{pmatrix} 1 & 17 & 5 & -19 \\ 0 & -28 & -7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 208 \end{pmatrix}$ Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Sonderfälle, die beim allgemeinen Diagonlisieren ausgeschlossen wurden:

$$\mathbf{M1(r)} := \begin{pmatrix} 1 & 17 & -r & -19 \\ 1 & r-6 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & r & 22 \end{pmatrix}$$

r = 23

$$\mathbf{M1(23)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 17 & -23 & -19 \\ 1 & 17 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & 23 & 22 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{zref(M1(23))} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{24}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung

r = 2

$$\mathbf{M1(2)} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 17 & -2 & -19 \\ 1 & -4 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & 2 & 22 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{zref(M1(2))} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{33}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{16}{7} \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung

Für $r \neq -5 \wedge r \neq 8$ Das Gleichungssystem hat genau eine Lösung.