Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2013

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Der DJ des regionalen Radiosenders *Airplay* hat für die nächsten beiden Stunden 40 Lieder ausgewählt und in einer *Playlist* gespeichert. Darunter befinden sich 15 deutschsprachige Lieder.
Die Lieder in der Playlist werden in zufälliger Reihenfolge ohne Wiederholung abgespielt.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)
Auf wie viele Arten können die 40 Lieder angeordnet werden, wenn nur zwischen deutschsprachigen und nicht deutschsprachigen Liedern unterschieden wird?

$\mathrm{combin}(40, 15) = 40225345056$

$$\binom{40}{15} = 40225345056$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den ersten 10 gespielten Liedern
a) genau 5 deutschsprachige Lieder sind.
b) zuerst 4 deutschsprachige und dann 6 nicht deutschsprachige Lieder sind.

Teilaufgabe a)

$$\frac{\binom{15}{5}\cdot\binom{25}{5}}{\binom{40}{10}} = \frac{3003\cdot 53130}{847660528} = 0.188$$

Nebenrechnung:

$\mathrm{combin}(15, 5) = 3003$

$\mathrm{combin}(25, 5) = 53130$

$\mathrm{combin}(40, 10) = 847660528$

$$\frac{3003\cdot 53130}{847660528} = 0.188$$

Teilaufgabe b)

$$\frac{\binom{15}{4}\cdot\binom{25}{0}}{\binom{40}{4}}\cdot\frac{\binom{11}{0}\cdot\binom{25}{6}}{\binom{36}{6}} = 0.00136$$

Nebenrechnung:

$\mathrm{combin}(15, 4) = 1365$ $\quad$ $\mathrm{combin}(11, 0) = 1$

$\mathrm{combin}(25, 0) = 1$ $\quad$ $\mathrm{combin}(25, 6) = 177100$

$\mathrm{combin}(40, 4) = 91390$ $\quad$ $\mathrm{combin}(36, 6) = 1947792$

$$\frac{1365\cdot 1}{91390}\cdot\frac{1\cdot 177100}{1947792} = 0.00136$$

Teilaufgabe 2 (3 BE)
Für die letzte halbe Stunde der Nachtsendung sind noch 20 Lieder in der Playlist, von denen aber aus Zeitgründen nur 10 gespielt werden können.
Der DJ hat wieder die zufällige Reihenfolge eingestellt, aber vergessen, die Wiederholungsfunktion abzuschalten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der letzten halben Stunde trotzdem kein Titel mehrmals abgespielt wird.

Nur verschiedene Lieder:

$$P_{versch} := \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{20^{10}} = 0.065$$

Teilaufgabe 3.0
Der Radiosender ließ in seiner Region eine Telefonumfrage unter zufällig ausgewählten Personen zum Bekanntheitsgrad des Senders durchführen.
40% der Personen waren weiblich, wobei jede Zehnte von diesen den Sender nicht kannte. 75% der Personen, die den Sender nicht kannten, waren männlich.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
F: *Eine Person kannte den Sender bereits.*
G: *Eine Person war männlich und kannte den Sender bereits.*

Weiblich: (W)

Sender bekannt: (K)

Gegeben: $P(W) = 0.40$ $\quad P(W \cap nK) = \frac{1}{10} \cdot 0.4 = 0.04$

$$\frac{P(nK \cap W)}{P(nK \cap nW)} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad P(nK \cap nW) = 3 \cdot P(nK \cap W) = 3 \cdot 0.04 = 0.12$$

Vierfeldertafel:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & W & \overline{W} & \blacksquare \\ K & 0.36 & 0.48 & 0.84 \\ \overline{K} & 0.04 & 0.12 & 0.16 \\ \blacksquare & 0.40 & 0.60 & 1 \end{pmatrix}$$

$P_F = P(K) = 0.84$

$P_G = P(nW \cap K) = 0.48$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Ermitteln Sie, wie viel Prozent der männlichen Teilnehmer den Sender noch nicht kannten.

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{nW}(nK) = \frac{P(nW \cap nK)}{P(nW)} = \frac{0.12}{0.60} = 0.20$$

Teilaufgabe 4.0
Um seinen Bekanntheitsgrad zu steigern, führt der Sender ein Gewinnspiel durch. Dazu werden 400 CDs mit speziellen Liedern und einem Cover mit dem Logo des Senders benötigt.
Aus der Erfahrung weiß man, das 95% der bestellten CDs brauchbar sind.

Teilaufgabe 4.1 (8 BE)
Wie viele CDs muss der Radiosender mindestens in Auftrag geben, damit mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 400 fehlerfreie CDs darunter sind?

Gegeben: $k_0 := 400 \quad p := 0.95$

X: Anzahl der einwandfreien CDs.

$$P(X \ge 400) \ge 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 399) \ge 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 399) \le 0.01$$

$\mu = n \cdot p \qquad \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p) = n \cdot 0.95 \cdot 0.05 = n \cdot 0.0475$

Sei n=400: $\sigma^2 = 400 \cdot 0.0475 = 19$ σ^2 >9, Näherung durch Normalverteilung möglich

$$\Phi\left(\frac{399 - n \cdot 0.95 + 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.0475}}\right) \le 0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{399 - n \cdot 0.95 + 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.0475}} \le -2.326$$

$$399.5 - n \cdot 0.95 \le -2.326 \cdot \sqrt{0.0475} \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $z = \sqrt{n}$

$$\Rightarrow \quad 0.95 \cdot z^2 - 2.326 \cdot \sqrt{0.0475} \cdot z - 399.5 \ge 0$$

NR:

$$z_0 := 0.95 \cdot z^2 - 2.326 \cdot \sqrt{0.0475} \cdot z - 399.5 = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 6\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} -20.2417 \\ 20.7753 \end{pmatrix}$$ keine Lösung

Resubstitution: $n := \left(z_{0_2}\right)^2 = 431.613$ Aufrunden: $n_{min} := \text{ceil}(n) = 432$

Es müssen mindestens 232 CDs bestellt werden.

Teilaufgabe 4.2 **(3 BE)**
Die unbrauchbaren CDs haben mindestens einen der voneinander unabhängigen Fehler A (*Die CD weist einen Brennfehler auf*) oder Fehler B (*Das Cover ist ein Fehldruck*).
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler A, wenn bekannt ist, dass der Fehler B mit einer Wahrscheinlichkeit 3% auftritt.

Wahrscheinlichkeit für keinen Fehler: $P_{\text{kein Fehler}} = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \overset{!}{=} 0.95$

$$P(\overline{B}) = 0.97 \quad \Rightarrow \quad P(\overline{A}) = \frac{0.95}{0.97} = 0.97938$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0.97938 = 0.0206$$

Teilaufgabe 5.0
Der Radiosender wirbt mit einer Quote von mindestens 10% deutschsprachiger Songs. Ein Hörer hat den Verdacht, dass diese Angabe zu hoch ist (Gegenhypothese). In einem Test betrachtet er 500 Lieder.

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)
Ermitteln Sie die Entscheidungsregel für diesen Test bei einem Signifikanzniveau von 5%.
[Teilergebnis: $A = \{\, 39, ..., 500 \,\}$]

Testgröße: Anzahl der deutschsprachigen Lieder unter $n := 500$.
Testart: Linksseitiger Signifikanztest $p := 0.10$
Nullhypothese H_0: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.1$

Gegenhypothese H_1: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.1$

Annahmebereich: $A = \{\, k+1, k+2, ..., 500 \,\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, ..., k \,\}$

Sigifikanzniveau: $\alpha_S = 0.05$

$$P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.05$$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 50$ $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 6.708$ > 3

Näherung durch Normalverteilung möglich.

$$\Phi\left(\frac{k-\mu+0.5}{\sigma}\right) \leq 0.05$$

Tafelwerk: $\frac{k-\mu+0.5}{\sigma} \leq -1.645$ auflösen, $k \rightarrow -\infty < k \leq 38.465004531038537337$

$\Rightarrow$ $k_{max} = 38$

Annahmebereich: $A = \{\, 39, 40, ..., 500 \,\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\, 0, 1, ..., 38 \,\}$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)
Wie groß ist bei obiger Entscheidungsregel die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Nullhypothese angenommen wird, obwohl der Anteil der deutschsprachigen Lieder tatsächlich nur 8% beträgt.

$$P_A = P(X \geq 39) = 1 - P(X \leq 38)$$

$p_{neu} := 0.08$ $\mu_{neu} := n \cdot p_{neu} = 40$ $\sigma_{neu} := \sqrt{n \cdot p_{neu} \cdot (1-p_{neu})} = 6.066$

$$1 - \Phi\left(\frac{38-\mu_{neu}+0.5}{\sigma_{neu}}\right) = 1 - \Phi(-0.247) = 1 - (1 - \Phi(0.247)) = \Phi(0.247) = 0.59871$$