Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1998

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung**

Aufgabe 1.0

Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_k mit $k \in IR^+$, der Definitionsmenge $D_{f_k} = IR$ sowie dem Funktionsterm $f_k(x) = \dfrac{k \cdot e^x - 2}{e^{2 \cdot x}}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge und die Schnittpunkte des Graphen von f_k mit den Koordinatenachsen in Abhängigkeit von k.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{k \cdot e^x - 2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{2 \cdot x}}} \right) \overset{\text{I. H.}}{=} \lim_{x \to \infty} \left(\frac{k \cdot e^x}{2 \cdot e^{2 \cdot x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{k}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{2 \cdot e^x}} \right) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\overset{\overset{0-2}{\uparrow}}{k \cdot e^x - 2}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{e^{2 \cdot x}}} \right) \to -\infty$$

$$f_k(x) = 0 \qquad k \cdot e^x - 2 = 0 \qquad x = \ln\left(\frac{2}{k}\right)$$

$$f(x, k) := \frac{k \cdot e^x - 2}{e^{2 \cdot x}} \qquad f(0, k) = k - 2$$

Teilaufgabe 1.2 (10 BE)
Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Koordinaten und Art der Extrempunkte und die Koordinaten der Wendepunkte des Graphen von f_k.

[Teilergebnis: $f'_k(x) = \left(-k \cdot e^x + 4\right) \cdot e^{-2 \cdot x}$; WP ($\ln\left(\frac{8}{k}\right)$; y_W)]

$$f'_k(x) = \frac{e^{2 \cdot x} \cdot k \cdot e^x - \left(k \cdot e^x - 2\right) \cdot 2 \cdot e^{2x}}{\left(e^{2 \cdot x}\right)^2} = \frac{e^{2 \cdot x} \cdot \left(k \cdot e^x - 2 \cdot k \cdot e^x + 4\right)}{\left(e^{2 \cdot x}\right)^2} = \frac{-k \cdot e^x + 4}{e^{2 \cdot x}}$$

$$f''_k(x) = \frac{-k \cdot e^x \cdot e^{2 \cdot x} - \left(-k \cdot e^x + 4\right) \cdot 2 \cdot e^{2 \cdot x}}{e^{4 \cdot x}} = \frac{e^{2 \cdot x} \cdot \left(-k \cdot e^x + 2 \cdot k \cdot e^x - 8\right)}{e^{4 \cdot x}} = \frac{k \cdot e^x - 8}{e^{2 \cdot x}}$$

Extrempunkte:

$f'_k(x) = 0 \qquad -k \cdot e^x + 4 = 0 \qquad x = \ln\left(\frac{4}{k}\right)$ für k > 0

$$f\left(\ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{k \cdot \left(\frac{4}{k}\right) - 2}{\left(\frac{4}{k}\right)^2} = \frac{2}{\frac{16}{k^2}} = \frac{k^2}{8}$$

$$f''\left(\ln\left(\frac{4}{k}\right)\right) = \frac{k \cdot \left(\frac{4}{k}\right) - 8}{\left(\frac{4}{k}\right)^2} = \frac{-4}{\frac{16}{k^2}} = \frac{-k^2}{4}$$

< 0, also Hochpunkt $\quad H\left(\ln\left(\frac{4}{k}\right), \frac{k^2}{8}\right)$ für k > 0

kein Extrempunkt für k < 0.

Wendepunkt:

$f''_k(x) = 0 \qquad k \cdot e^x - 8 = 0 \qquad x = \ln\left(\frac{8}{k}\right)$ für k > 0 einfache Nullstelle, also Wendestelle

$$f\left(\ln\left(\frac{8}{k}\right)\right) = \frac{k \cdot \left(\frac{8}{k}\right) - 2}{\left(\frac{8}{k}\right)^2} = \frac{6}{\frac{64}{k^2}} = \frac{3 \cdot k^2}{32}$$

Wendepunkt: $\quad W\left(\ln\left(\frac{8}{k}\right), \frac{3 \cdot k^2}{32}\right)$ für k > 0

kein Wendepunkt für k < 0.

Aufgabe 1.3 **(5 BE)**
Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente und berechnen Sie den Wert von k, für den diese Tangente durch den Ursprung geht.

Steigung im Wendepunkt: $f'\left(\ln\left(\frac{8}{k}\right)\right) = \dfrac{-k\cdot\left(\frac{8}{k}\right)+4}{\frac{64}{k^2}} = \frac{-4}{64}\cdot k^2 = \frac{-1}{16}\cdot k^2$

Gleichung der Wendetangente: $t(x) = \frac{-1}{16}\cdot k^2\cdot\left(x - \ln\left(\frac{8}{k}\right)\right) + \frac{3\cdot k^2}{32}$

Tangente durch den Ursprung:

$t(0) = 0$ $\quad \frac{-1}{16}\cdot k^2\cdot\left(0 - \ln\left(\frac{8}{k}\right)\right) + \frac{3\cdot k^2}{32} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{k^2}{16}\cdot\ln\left(\frac{8}{k}\right) - \frac{3\cdot k^2}{32} = 0$

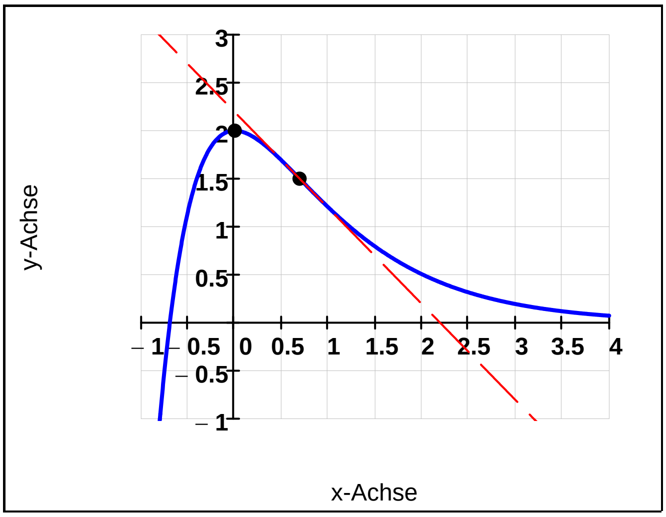
$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \frac{3}{32}\cdot k^2\cdot\frac{16}{k^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{8}{k}\right) = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{8}{k} = e^{\frac{3}{2}}$ auflösen, k $\rightarrow 8\cdot e^{-\frac{3}{2}}$ $\quad k = 8\cdot e^{-\frac{3}{2}}$

Aufgabe 1.4 **(5 BE)**
Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen von f_4 und die zugehörige Wendetangente in ein kartesisches Koordinatensystem für $-1 \le x \le 4$ (1 LE = 2 cm).

$f(x) := \dfrac{4\cdot e^x - 2}{e^{2\cdot x}}$ Hochpunkt: $H(0, 2)$ Wendepunkt: $W\left(\ln(2), \frac{3}{2}\right)$

$t(x) := -(x - \ln(2)) + \frac{3}{2}$



Aufgabe 1.5 **(5 BE)**
Der Graph von f_k und die x-Achse begrenzen für $\mathbf{k > 0}$ ein Flächenstück A, das sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Bestimmen Sie die Flächenmaßzahl von A in Abhängigkeit von k.

$$A(k) = \lim_{b \to \infty} \int_{\ln\left(\frac{2}{k}\right)}^{b} \frac{k \cdot e^{x} - 2}{e^{2 \cdot x}}\, dx$$

Stammfunktion:

$$\int \frac{k \cdot e^{x} - 2}{e^{2 \cdot x}}\, dx = \int \left(k \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-2 \cdot x}\right) dx = -k \cdot e^{-x} - 2 \cdot \left(\frac{-1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x}\right) = -k \cdot e^{-x} + e^{-2 \cdot x}$$

Flächenmaßzahl:

$$A(k) = \lim_{b \to \infty} \left[-k \cdot e^{-b} + e^{-2 \cdot b} + k \cdot \frac{1}{\frac{2}{k}} - \frac{1}{\left(\frac{2}{k}\right)^{2}}\right]$$

$$A(k) = \lim_{b \to \infty} \left(\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{-k \cdot e^{-b}} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^{-2 \cdot b}} + \frac{k^{2}}{2} - \frac{k^{2}}{4}\right) = \frac{k^{2}}{4}$$

Aufgabe 1.6 (5 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion F mit $\mathbf{F(x) = \int_0^x f_4(t)\,dt}$ mit $\mathbf{x \in IR}$.

Begründen Sie die Anzahl der Nullstellen von F. Geben Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von F an.

$$F(x) = \int_0^x \frac{4\cdot e^t - 2}{e^{2\cdot t}}\,dt = \int_0^x \left(4\cdot e^{-t} - 2\cdot e^{-2\cdot t}\right)dt = -4\cdot e^{-x} + e^{-2\cdot x} + 4\cdot e^0 - e^0$$

$$F(x) = -4\cdot e^{-x} + e^{-2\cdot x} + 3$$

$$F(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\cdot x} - 4\cdot e^{-x} + 3 = 0$$

Substitution: $e^{-x} = z$

$$z^2 - 4\cdot z + 3 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Resubstitution: $e^{-x} = 1 \qquad x_1 = -\ln(1) = 0$

$e^{-x} = 3 \qquad x_2 = -\ln(3)$

Wendestelle von F: $F''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = 0$

Wendepunkt von F: $F(0) = 0 \qquad$ **W(0/0)**

Aufgabe 1.7 (7 BE)

Begründen Sie, dass die Funktion f_4 für $\mathbf{x \geq 0}$ eine Umkehrfunktion g besitzt.

Bestimmen Sie $\mathbf{g(x)}$ und die Definitionsmenge von g.

$f_4(x)$ ist streng monoton fallend für $x \geq 0$, also umkehrbar.

$f_4(x) = \dfrac{4\cdot e^x - 2}{e^{2\cdot x}} \qquad y = \dfrac{4\cdot e^x - 2}{e^{2\cdot x}} \qquad D_f = [\,0\,;\,\infty\,[\qquad W_f =]\,0\,;\,2\,]$

Vertauschen der Variablen: $x = \dfrac{4\cdot e^y - 2}{e^{2\cdot y}} \qquad D_g =]\,0\,;\,2\,] \qquad W_g = [\,0\,;\,\infty\,[$

Auflösen: $x \cdot e^{2 \cdot y} = 4 \cdot e^{y} - 2 \qquad x \cdot e^{2 \cdot y} - 4 \cdot e^{y} + 2 = 0$

Subsitution: $e^{y} = z$

$$x \cdot z^{2} - 4 \cdot z + 2 = 0 \text{ auflösen}, z \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - x} + 2}{x} \\ -\dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - x} - 2}{x} \end{pmatrix}$$

Lösungen: $z_1 = \dfrac{2 + \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x} \qquad z_2 = \dfrac{2 - \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x}$

Resubsitution: $e^{y} = \dfrac{2 + \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) := \ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x}\right)$

$$e^{y} = \dfrac{2 - \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) := \ln\left(\dfrac{2 - \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x}\right)$$

Wendepunkt $W\left(\ln(2), \dfrac{3}{2}\right)$ liegt auf dem Graphen von f_4. Dann liegt $P\left(\dfrac{3}{2}, \ln(2)\right)$ auf dem Graphen von g.

$y_1\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln(2)$ Umkehrfunktion: $g(x) = \ln\left(\dfrac{2 + \sqrt{4 - 2 \cdot x}}{x}\right)$

$y_2\left(\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{2}{3}\right)$ y_2 ist keine Lösung

Aufgabe 2 (7 BE)
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \cdot y' + y - x \cdot \cos(x) = 0 \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}^+$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Inhomogene DGL: $x \cdot y' + y = x \cdot \cos(x)$

Homogene DGL: $x \cdot y' + y = 0$ Triviale Lösung: $y = 0$

Auflösen nach y': $y' = \frac{-y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$

Trennen der Variablen: $\int \frac{1}{y}\, dy = \int \frac{-1}{x}\, dx$ mit $y \neq 0 \wedge x > 0$

Integration: $\ln(|y|) = -\ln(x) + k$

Delogarithimieren: $|y| = e^{-\ln(x)+k} = \frac{1}{x} \cdot e^k$

$y > 0$ $\quad y = \frac{1}{x} \cdot K_1$ mit $K_1 = e^k > 0$

$y < 0$ $\quad y = \frac{1}{x} \cdot K_2$ mit $K_2 = -e^k < 0$

mit trivialer Lösung: $y = K \cdot \frac{1}{x}$

allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h(x) = K \cdot \frac{1}{x}$

Variation der Konstanten:

$$y_p(x) = K(x) \cdot \frac{1}{x} \qquad y'_p(x) = K'(x) \cdot \frac{1}{x} + K(x) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

Einsetzen in inhomogene DGL:

$$x \cdot \left[K'(x) \cdot \frac{1}{x} + K(x) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right] + K(x) \cdot \frac{1}{x} = x \cdot \cos(x)$$

Vereinfachen: $K'(x) = x \cdot \cos(x)$

Integrieren: $K(x) = \int x \cdot \cos(x)\, dx$

$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos(x) \qquad v(x) = \sin(x)$

Partielle Integration: $K(x) = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\, dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x)$

Spezielle Lösung der inhomog. DGL:

$$y_p(x) = (x \cdot \sin(x) + \cos(x)) \cdot \frac{1}{x} = \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$

allgemeine Lösung der inhomog. DGL:

$$y_A(x) = y_h(x) + y_p(x) = K \cdot \frac{1}{x} + \left(\sin(x) + \frac{\cos(x)}{x} \right) \qquad K \in \mathrm{IR}.$$