Abiturprüfung Berufliche Oberschule 1998

• Mathematik 13 Technik - B I - Lösung

In einer Fruchtgroßhandelsfirma werden für eine Supermarktkette Früchte abgepackt. Dabei mischt man eine große Anzahl von Früchten des Importeurs A und die etwas kleineren Früchte derselben Sorte des Importeurs B im Verhältnis 60 : 40 und füllt vorerst je 20 Früchte in ein Netz. Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 1 **(10 BE)**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
E_1: *In einem Netz befinden sich genau 12 Früchte des Importeurs A.*
E_2: *In einem Netz befinden sich mindestens 7 Früchte des Importeurs B.*
E_3: *In einem Netz sind weniger Früchte von Importeur A als von B.*
E_4: *Unter 4 beliebig herausgegriffenen Netzen sind in höchstens drei Netzen mindestens 7 Früchte des Importeurs B.*
[Zur Kontrolle: $P(E_2) = 0.750$; $P(E_3) = 0.128$]

Wahrscheinlichkeit, dass die Frucht von A stammt: $p_A := 0.6$

Wahrscheinlichkeit, dass die Frucht von B stammt: $p_A := 0.4$

Anzahl der Früchte: $n := 20$

$$P(E_1) = W(12) = B(20, 0.6, 12) = 0.17971 = 0.180$$

$$P(E_2) = P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - \sum_{i=0}^{6} B(20, 0.4, i) = 1 - 0.25001 = 0.74999 = 0.750$$

$$P(E_3) = P(X < 10) = \sum_{i=0}^{9} B(20, 0.6, i) = 0.12752 = 0.128$$

$$P(E_4) = 1 - P(\text{"in allen vier Netzen befinden sich mindestens 7 Früchte des Importeurs B"})$$

$$P(E_4) = 1 - (P(E_2))^4 = 1 - 0.750^4 = 0.684$$

Aufgabe 2 (5 BE)
Beim Abfüllen der Früchte reißt ein Netz mit der Wahrscheinlichkeit **0.02**.
Berechnen Sie, nach wie vielen Abfüllvorgängen die Wahrscheinlichkeit für das Reißen von mindestens einem Netz größer als 95% ist.

$p := 0.02$

$P(X \geq 1) > 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 0) > 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 0) < 0.05$

Bernoullikette: $\binom{n}{0} \cdot 0.02^0 \cdot 0.98^n < 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 0.98^n < 0.05$

Logarithmieren: $n \cdot \ln(0.98) < \ln(0.05) \quad \Leftrightarrow \quad n > \dfrac{\ln(0.05)}{\ln(0.98)} \quad \Leftrightarrow \quad n > 148.284$

gerundet: $n = 149$

Aufgabe 3.0
Die Netze mit 20 Früchten haben folgende Masseverteilung:

$$\begin{pmatrix} \text{"Masse in kg"} & m < 2.85 & 2.85 \leq m < 3.00 & 3.00 \leq m < 3.15 & 3.15 \leq m < \infty \\ \text{"Relative Häufigkeit"} & 0.22 & 0.28 & 0.28 & 0.22 \end{pmatrix}$$

Interpretieren Sie die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 3.1 (3 BE)
Für die Ereignisse E_3 aus Aufgabe 1 und E_5: *Ein Netz mit 20 Früchten wiegt weniger als 3,00 kg* gilt: $P(E_3 \cap \cdot E_5) = 0.10$.
Untersuchen Sie, ob die Ereignisse E_3 und E_5 stochastisch unabhängig sind.

$P(E_3) = 0.12752$

$P(E_5) = 0.22 + 0.28 = 0.5$

$P(E_3) \cdot P(E_5) = 0.12752 \cdot 0.5 = 0.064$

$P(E_3) \neq P(E_3 \cap \cdot E_5)$

$\Leftrightarrow$ Die Ereignisse E_3 und E_5 sind nicht stochastisch unabhängig.

Aufgabe 3.2 (7 BE)
Es werden nacheinander 1000 Netze gewogen. Netze mit weniger als 3,00 kg werden nun auf folgende Art aufgefüllt: Wiegt ein Netz weniger als 2,85 kg, werden 2 Früchte nachgelegt, wiegt ein Netz mindestens 2,85 kg und weniger als 3,00 kg, wird eine Frucht nachgelegt.
Berechnen Sie den Erwartungswert der zum Nachlegen erforderlichen Früchte.
Bestimmen Sie außerdem das kleinstmögliche zum Erwartungswert symmetrische Intervall, in dem sich mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der zum Nachlegen erforderlichen Früchte befindet.

Y: Zahl der nachzulegenden Früchte pro Netz

$$\begin{pmatrix} \text{"Y"} & 0 & 1 & 2 \\ \text{"P(Y=yi)"} & 0.5 & 0.28 & 0.22 \end{pmatrix}$$

$$\mu := 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.28 + 2 \cdot 0.22 \qquad \Rightarrow \qquad \mu = 0.72$$

Pro Netz müssen also durchschnittlich **0.72** Früchte nachgelegt werden, bei 1000 Netzen also 720 Früchte.

Z: Zahl der nachzulegenden Früchte pro 1000 Netzen.

$$\mu := 1000 \cdot 0.72 = 720 \qquad \mu = n \cdot p \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{\mu}{n} = \frac{720}{1000} = 0.72$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - 0.72)} = \sqrt{720 \cdot 0.28} = \sqrt{201.6}$$

$$P(|Z - \mu| \le c) \ge 0.9 \qquad \Leftrightarrow \qquad P(\mu - c \le Z \le \mu + c) \ge 0.9$$

$$\Leftrightarrow \qquad P(Z \le \mu + c) - P(Z \le \mu - c - 1) \ge 0.9$$

$$\Leftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{\mu + c - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - c - 1 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.9$$

Umgebungsformel: $2 \cdot \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) - 1 \ge 0.9 \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi\left(\frac{c + 0.5}{\sigma}\right) \ge 0.95$

Tafelwerk: $\frac{c + 0.5}{\sigma} \ge 1.645 \qquad c := 1.645 \cdot 14.20 - 0.5 \qquad c = 22.859$

$$\Leftrightarrow \qquad c \ge 22.859 \qquad \Leftrightarrow \qquad c \ge 23$$

untere Grenze: $k_1 := 720 - 23 = 697$

obere Grenze: $k_2 := 720 + 23 = 743$

Aufgabe 4 **(7 BE)**
Nach dem Auffüllen der Netze von Aufgabe 3.2 untersucht ein Einkäufer durch einen Signifikanztest der Länge 50, ob die Nullhypothese "Mindestens 85% der Netze wiegen mindestens 3,00 kg" auf dem 5%-Signifikanzniveau verworfen werden muss.
Bestimmen Sie den größtmöglichen Verwerfungsbereich von H_0.

Testgröße: Anzahl der Netze unter 40, die mindestens 3,00 kg wiegen $\quad n := 50 \quad p := 0.85$

Testart: linksseitiger Signifikanztest

Nullhypothese: $p_0 \geq p \rightarrow p_0 \geq 0.85$

Gegenhypothese: $p_1 < p \rightarrow p_1 < 0.85$

Signifikanzniveau: $\alpha_S := 5\% \qquad \alpha_S = 0.05$

Annahmenbereich: $A = \{ k+1, k+2, ..., 50 \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{ 0, 1, ..., k \}$

$$P(\overline{A}) \leq \alpha_S \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=0}^{k} B(50, 0.85, i) = 0.03006 \qquad k = 37$$

$$\overline{A} = \{ 0, 1, ..., 37 \}$$