Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben sind die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{(x+2\cdot a)\cdot(x-a)}{x-5}$ in der vom Parameter $a \in IR$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = IR \setminus \{5\}$.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl der Nullstellen von f_a.

$$f(x,a) := \frac{(x+2\cdot a)\cdot(x-a)}{x-5}$$

$a = 5$ eine Nullstelle

$a = \frac{-5}{2}$ eine Nullstelle

$a = 0$ eine Nullstelle

$a \neq 0 \wedge a \neq \frac{-5}{2} \wedge a \neq 5$ zwei einfache Nullstellen

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Berechnen Sie sämtliche Werte von a, für welche die Steigung des Graphen von f_a an der Stelle $x = 4$ den Wert -6 besitzt.

$$f(x,a) := \frac{x^2 + a\cdot x - 2\cdot a^2}{x-5}$$

$$f'(x,a) = \frac{(2\cdot x + a)\cdot(x-5) - \left(x^2 + a\cdot x - 2\cdot a^2\right)\cdot 1}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10\cdot x + 2\cdot a^2 - 5\cdot a}{(x-5)^2}$$

$$f'(x,a) = \frac{2\cdot x^2 + a\cdot x - 10\cdot x - 5\cdot a - x^2 - a\cdot x + 2\cdot a^2}{(x-5)^2}$$

$$f'(x,a) = \frac{x^2 - 10\cdot x + 2\cdot a^2 - 5\cdot a}{(x-5)^2}$$

$f'_a(x) = -6$

$$\frac{16 - 40 + 2\cdot a^2 - 5\cdot a}{(-1)^2} = -6$$

$$2\cdot a^2 - 5\cdot a - 18 = 0$$

$$f'(4, a) = -6 \rightarrow (a-4)\cdot(2\cdot a + 4) - a - 8 = -6 \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3.0
Für die nun folgenden Aufgaben wird die Funktion g mit maximaler Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$ und der Funktionsgleichung $g(x) = \ln\left[f_{-2}(x)\right]$ betrachtet, das heißt es gilt $g(x) = \ln\left[\frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5}\right]$.

Teilaufgabe 1.3.1 (4 BE)
Zeigen Sie, dass für den maximalen Definitionsbereich D_g der Funktion g gilt:
$D_g = \,]-2\,;\,4[\, \cup \,]\,5\,;\,\infty[$.

$$g(x) := \ln\left[\frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5}\right]$$

$$\frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5} > 0 \qquad\qquad y1 := -10\,..\,10$$

		$x \neq -2$		$x \neq 4$		$x \neq 5$	
Zähler	pos		neg		pos		pos
Nenner	neg		neg		neg		pos
Argument	neg		pos		neg		pos
definiert			$]-2\,;\,4[$				$]\,5\,;\,\infty[$

Teilaufgabe 1.3.2 (8 BE)
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte g(x) an den Rändern des Definitionsbereiches und geben Sie die Gleichungen aller senkrechten Asymptoten des Graphen von g an.

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5} \to 0 \qquad \lim_{x \to -2^+} g(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5} \to 0 \qquad \lim_{x \to 4^-} g(x) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5} \to \infty \qquad \lim_{x \to 5^+} g(x) \to \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x-4)\cdot(x+2)}{x-5} = \lim_{x \to \infty} \frac{\overset{\infty}{\uparrow}\; x^2 - 2\cdot x - 8}{\underset{\infty}{\downarrow}\; x-5} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2\cdot x - 2}{1} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} g(x) \to \infty$$

senkrechte Asymptote A_1: $x = -2$

senkrechte Asymptote A_2: $x = 4$

senkrechte Asymptote A_3: $x = 5$

Teilaufgabe 1.3.3 (10 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g und zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von g für $-2 < x \leq 9$ zusammen mit seinen senkrechten Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,\text{LE} = 1\text{cm}$.

$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2 - 2\cdot x - 8}{x-5}\right)$$

$$g'(x) = \frac{x-5}{(x-4)\cdot(x+2)} \cdot \frac{(2\cdot x - 2)\cdot(x-5) - \left(x^2 - 2\cdot x - 8\right)\cdot 1}{(x-5)^2}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x-4)\cdot(x+2)} \cdot \frac{2\cdot x^2 - 10\cdot x - 2\cdot x + 10 - x^2 + 2\cdot x + 8}{(x-5)}$$

$$g'(x) = \frac{1}{(x-4)\cdot(x+2)} \cdot \frac{x^2 - 10\cdot x + 18}{(x-5)}$$

$$g'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 10\cdot x + 18 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{7}+5 \\ 5-\sqrt{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7.6 \\ 2.4 \end{pmatrix}$$

	$x \neq -2$		$x = 2.4$	$x \neq 4$	$x \neq 5$	$x = 7.6$	
Zähler	nicht def.	pos	neg	n.d.	neg	pos	
Nenner	nicht def.	pos	pos	n.d.	pos	pos	
g`(x)	nicht def.	pos	neg	n.d.	neg	pos	
G_g	nicht def.	sms	smf	n.d.	smf	sms	
			HP			TP	

G_f ist streng monoton steigend in $]-2\,;\ 2.4]$ und in $[\,7.7\,;\ \infty[$

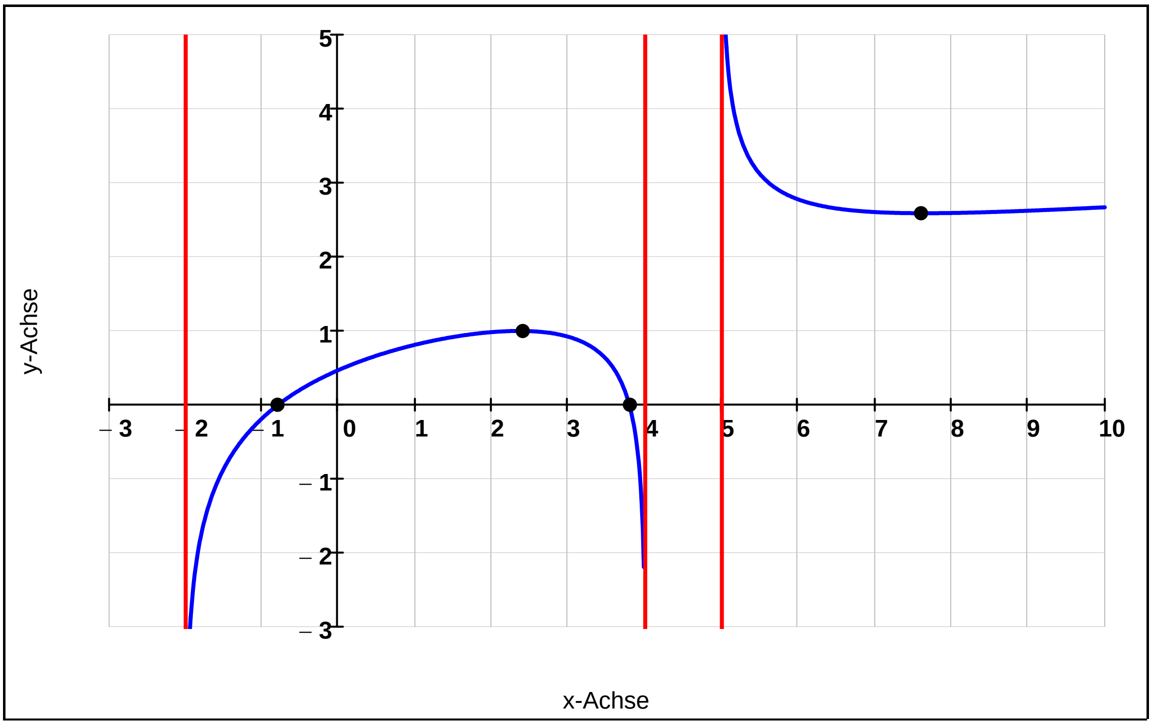
G_f ist streng monoton fallend in $[\,2.4\,;\ 4[$ und in $]\,5\,;\ 7.6]$

$g(2.4) = 0.996$ **HP(2,4 / 1,0)**

$g(7.6) = 2.59$ **TP(7,6 / 2,6)**

Teilaufgabe 1.3.4 (6 BE)
Die Funktion g besitzt näherungsweise die beiden Nullstellen $x_1 \approx -0.8$ und $x_2 \approx 3.8$ (Nachweis nicht erforderlich)
Zeichnen Sie unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen von g für $-2 < x \leq 9$ zusammen mit seinen senkrechten Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: $1\,LE = 1cm$.

$$xd = \begin{pmatrix} -1.5 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5.5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad g(xd) = \begin{pmatrix} -0.9 \\ -0.2 \\ 0.5 \\ 0.8 \\ 1 \\ 0.9 \\ 3.1 \\ 2.8 \\ 2.6 \\ 2.6 \\ 2.6 \end{pmatrix}$$



Teilaufgabe 2.0
Seit Beginn des 20. Jahrhunderst führt der vom Menschen verursachte zusätzliche Ausstoß von Kohlenstoffdioxid (CO_2) zu einer Verstärkung des Treibhauseffektes, das heißt zu einem globalen Temperaturanstieg mit weitreichenden Folgen.
Nach einem mathematischen Modell soll die Entwicklung der weltweiten CO_2-Emissionen abgeschätzt werden. Dieses Modell lässt sich näherungsweise durch die mathematische Funktion k mit $k(t) = a\cdot t^2\cdot e^{-b\cdot t} + 7$ mit $t, a, b \in IR$ und $t \geq 0, a > 0, b > 0$ darstellen.
Dabei entspricht $k(t)$ der CO_2-Emissionsrate in Mrd. Tonnen po Jahr zum Zeitpunkt t, wobei t die seit Beginn des Jahres 1950 vergangene Zeit in Jahren beschreibt. Unter der CO_2-Emissionsrate wird dabei im Folgenden die ausgestoßene Masse an CO_2 pro Zeiteinheit verstanden.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
Nach diesem Szenario lag die CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2000 bei genau 30 Mrd. Tonnen pro Jahr und zu Beginn des Jahres 2200 wird sie bei genau 17,5 Mrd. Tonnen pro Jahr liegen. Bestimmen Sie mithilfe dieser Angaben die Parameter a und b der Funktion k auf drei Nachkommastellen gerundet.

$$k(t, a, b) := a\cdot t^2\cdot e^{-b\cdot t} + 7$$

(1) $k(50, a, b) = 30 \rightarrow 2500\cdot a\cdot e^{-50\cdot b} + 7 = 30$

(2) $k(250, a, b) = 17.5 \rightarrow 62500\cdot a\cdot e^{-250\cdot b} + 7 = 17.5$

(1) $2500\cdot a\cdot e^{-50\cdot b} = 23 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{23\cdot e^{50\cdot b}}{2500}$

(2) $62500\cdot\dfrac{23\cdot e^{50\cdot b}}{2500}\cdot e^{-250\cdot b} = 10.5 \quad \Rightarrow \quad 62500\cdot\dfrac{23}{2500\cdot 10.5} = e^{200\cdot b}$

$b := \dfrac{1}{200}\cdot\ln\left(62500\cdot\dfrac{23}{2500\cdot 10.5}\right) \qquad b = 0.020$

$a := \dfrac{23\cdot e^{50\cdot b}}{2500} \qquad a = 0.025$

Teilaufgabe 2.2.0
Im Folgenden gilt $a = 0.025$ und $b = 0.020$.
Alle folgenden Ergebnisse sind gegebenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 2.2.1 (2 BE)
Bestimmen Sie die nach diesem Modell prognostizierte CO_2-Emissionsrate zu Beginn des Jahres 2017.

$k(t, a, b) := a \cdot t^2 \cdot e^{-b \cdot t} + 7$ $\qquad$ $k(t) := k(t, 0.025, 0.020) \rightarrow 0.025 \cdot t^2 \cdot e^{-0.02 \cdot t} + 7$

$2017 - 1950 = 67$

$k(67) = 36.4$ $\qquad$ 36,4 Milliarden Tonnen pro Jahr.

Teilaufgabe 2.2.2 (8 BE)
Berechnen Sie den Zeitpunkt t_m, zu dem die absolut maximale CO_2-Emissionsrate zu erwarten ist.

$$k(t) := 0.025 \cdot t^2 \cdot e^{-0.02 \cdot t} + 7$$

$$k'(t) = 0.025 \cdot 2 \cdot t \cdot e^{-0.02 \cdot t} + 0.025 \cdot t^2 \cdot (-0.02) \cdot e^{-0.02 \cdot t}$$

$$k'(t) = 0.025 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(2 \cdot t - 0.02 \cdot t^2\right) = 0.05 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(t - 0.01 \cdot t^2\right)$$

$$k'(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t - 0.01 \cdot t^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0.01 \cdot t \cdot (100 - t) = 0$$

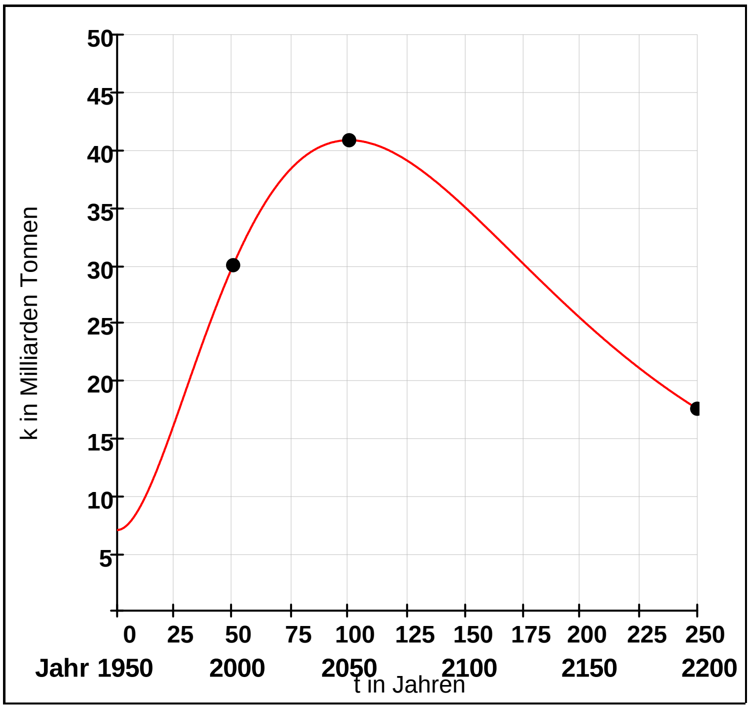
Zwei Extremstellen $\qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = 100$

$k(0) = 7 \qquad k(100) = 40.834$

Vergleich mit dem Randwert: $\lim\limits_{t \to \infty} k(t) \rightarrow 7.0$

absoluter Hochpunkt: **(100 / 40,8)**

Teilaufgabe 2.2.3 (4 BE)
Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion k für $0 \le t \le 250$ (die Jahre 1959 bis 2200) in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: t-Achse: 50 Jahre entspricht 2 cm; k-Achse: 10 Mrd. Tonnen / Jahr entspricht 2 cm.



$t_0 =$	$k(t_0) =$
0	7
25	16.5
50	30
75	38.4
100	40.8
125	39.1
150	35
175	30.1
200	25.3
225	21.1
250	17.5

Teilaufgabe 2.2.4 (7 BE)
Ermitteln Sie rechnerisch, in welchem Jahr zwischen 1950 und heute der Zeitpunkt liegt, an dem die CO_2-Emissionsrate nach diesem Modell am meisten zugenommen hat.

$$k'(t) = 0.05 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(t - 0.01 \cdot t^2\right)$$

$$k''(t) = 0.05 \cdot (-0.02) \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(-0.01 \cdot t^2 + t\right) + 0.05 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot (-0.02 \cdot t + 1)$$

$$k''(t) = 0.001 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left[0.01 \cdot t^2 - t + 50 \cdot (-0.02 \cdot t + 1)\right]$$

$$k''(t) = 0.001 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(0.01 \cdot t^2 - t - t + 50\right)$$

$$k''(t) = 0.001 \cdot e^{-0.02 \cdot t} \cdot \left(0.01 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 50\right)$$

$$k''(t) = 0 \qquad 0.01 \cdot t^2 - 2 \cdot t + 50 = 0$$

$t_1 = 100 - 50 \cdot \sqrt{2} = 29.3$

$t_2 = 10 + 50 \cdot \sqrt{2} = 170.7$

zwei Wendestellen,
da Nullst. mit VZW

$k'(29.29) = 0.576$ positiv

$k'(170.7) = -0.199$ negativ

$1950 + 29.3 = 1979.3$

Die größte Zuwachsrate erfolgte im Jahr 1979.

Teilaufgabe 2.2.5 (4 BE)

Die Funktion K mit $K(t) = \left(-1.25 \cdot t^2 - 125 \cdot t - 6250\right) \cdot e^{-0.02 \cdot t} + 7 \cdot t$ mit $t \geq 0$ und $t \in IR$ ist eine Stammfunktion von k (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie, wie viele Tonnen CO_2 voraussichtlich im Jahr 2016 insgesamt ausgestoßen werden, wenn das obige Modell zugrunde gelegt wird.

$K(t) := \left(-1.25 \cdot t^2 - 125 \cdot t - 6250\right) \cdot e^{-0.02 \cdot t} + 7 \cdot t$

$$A = \int_{66}^{67} k(t)\, dt$$

$K(67) = -4829.774$ $K(66) = -4866.014$

$A := K(67) - K(66) = 36.239$

Im Jahr 2016 werden in etwa 36,2 Tonnen ausgestoßen.