

Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

• Mathematik 12 Technik - A II - Lösung mit CAS



Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie **ohne CAS** die maximale Definitionsmenge D_f .

Geben Sie die Definitionslücke von f und ihre Art genau an.

1. Bedingung: $x > 0$

2. Bedingung: $(1 - \ln(x))^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 1 \Leftrightarrow x_0 = e$

Definitionsmenge: $D_f =]0; \infty[\setminus \{e\}$

Definitionslücke: $x = e$ Polstelle ohne VZW

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern von D_f .

Geben Sie die Art und die Gleichungen der daraus folgenden Asymptoten des Graphen von f an.

Zeigen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f seine horizontale Asymptote nicht schneidet.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{waagrechte Asymptote } A_1: y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{senkrechte Asymptote } A_2: x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2} \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \text{senkrechte Asymptoten } A_3: x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2} \rightarrow \infty$$

$$x > 0 \wedge (1 - \ln(x))^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{keine Nullstellen, also auch keine gemeinsamen Punkte mit } A_1.$$

Teilaufgabe 1.3 (11 BE)

Bestimmen Sie **ohne CAS** die maximalen Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie mithilfe dieser Monotonieintervalle die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen von f .

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3}$]

$$f'(x) = \frac{\left[1 \cdot (1 - \ln(x))^2 + x \cdot 2 \cdot (1 - \ln(x)) \cdot \frac{-1}{x} \right]}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^4} = (1 - \ln(x)) \cdot \frac{-1 + \ln(x) + 2}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^4}$$

$$f'(x) := \frac{1 + \ln(x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3}$$

waagrechte Tangenten:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Zähler: $z(x) := 1 + \ln(x)$

Nenner: $x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3$

Nennerfaktor: $n(x) := (1 - \ln(x))^3 \quad x > 0 \wedge x^2 > 0 \quad y1 := -6..3$

		$x \neq 0$	$x = \frac{1}{e}$	$x \neq e$	
Zähler:	n. d.	neg	pos	pos	
Nenner	n. d.	pos	pos	neg	
$f'(x)$	n. d.	neg	pos	neg	
G_f	n. d.	smf	smf	smf	

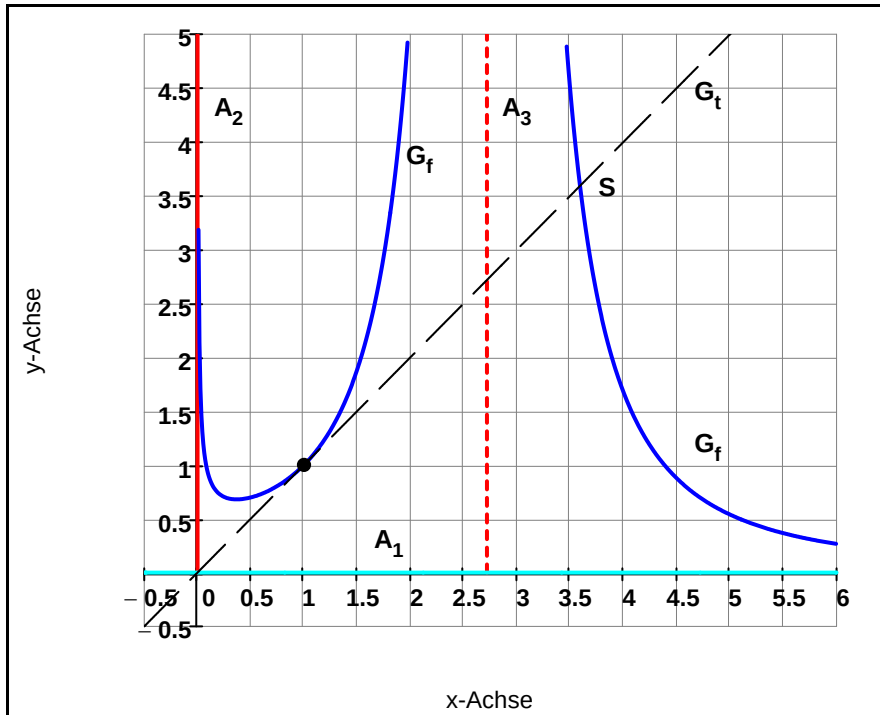
G_f ist streng mon. fallend in $]0; \frac{1}{e}]$ und in $]e; \infty[$. G_f ist streng mon. steigend in $[\frac{1}{e}; e[$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) \rightarrow \frac{e}{4}$ Tiefpunkt: $T\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{4}\right)$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)

Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f für $0 < x \leq 6$ sowie mit Farbe sämtliche Asymptoten von G_f in ein kartesisches

Koordinatensystem. Maßstab: **1 LE = 2 cm**


Teilaufgabe 1.5 (6 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f , die durch den Ursprung verläuft. Zeichnen Sie die Tangente t in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.4 ein.

[Teilergebnis: $t(x) = x$]

Wähle $P(u/v) \in G_f$

Tangente an G_f : $t(x, u) := f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$$t(x, u) = \frac{1}{u \cdot (\ln(u) - 1)^2} + \frac{(u - x) \cdot (\ln(u) + 1)}{u^2 \cdot (\ln(u) - 1)^3}$$

Durch den Ursprung: $t(0, u) = 0 \rightarrow \frac{1}{u \cdot (\ln(u) - 1)^2} + \frac{\ln(u) + 1}{u \cdot (\ln(u) - 1)^3} = 0$

Auflösen nach u : $u_0 := t(0, u) = 0$ auflösen, $u \rightarrow 1$

Einsetzen: $t(x) := t(x, u_0) \quad t(x) = x$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Die Tangente t schneidet G_f im Punkt $S(x_S | f(x_S))$. Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Schnittstelle $x_S > 3$.

Das Ergebnis ist genau genug, wenn sich der Funktionswert von $f(x)$ und $t(x)$ um höchstens 0.01 unterscheiden. Berechnen Sie x_S auch mithilfe des CAS und geben Sie die relative Abweichung (in %) der Ergebnisse von Newton-verfahren und CAS an.

$$f(x) = t(x) \rightarrow \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} = x$$

$$\text{Differenzfunktion: } D(x) := f(x) - t(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} - x$$

$$\text{Ableitung von } D(x): D'(x) := \frac{d}{dx} D(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot (\ln(x) - 1)^2} - \frac{2}{x^2 \cdot (\ln(x) - 1)^3} - 1$$

ORIGIN := 0

Startwert: $n := 0..4$ $z_0 := 4$

$$z_{n+1} := z_n - \frac{D(z_n)}{D'(z_n)} \quad z \text{ wegen Feldindex}$$

$n =$	$z_n =$	$z_{n+1} =$	$D(z_{n+1}) =$	
0	4	3.3519777	3.4419576	
1	3.3519777	3.5058321	0.9005227	
2	3.5058321	3.5800298	0.1036045	
3	3.5800298	3.5909332	0.0017290	$\rightarrow 0.0017290 < 0.01$
4	3.5909332	3.5911214	0.0000005	

$\Rightarrow x_S := 3.5909332$ für $n = 3$

$$\text{lsq} := D(x) = 0 \rightarrow \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} - x = 0 \text{ auflösen, } x \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ 3.5911214766686221366 \end{pmatrix}$$

$x_{\text{CAS}} := \text{lsq1}$ $x_{\text{CAS}} = 3.5911215$

Bezugsgröße x_{CAS} x_S

$$\text{relative Abweichung: } \frac{x_{\text{CAS}} - x_S}{x_{\text{CAS}}} = 0.0052428 \% \quad \frac{x_{\text{CAS}} - x_S}{x_S} = 0.0052431 \%$$

Teilaufgabe 1.7 (3 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$.

Zeigen Sie **ohne CAS**, dass F eine Stammfunktion von f in D_F ist.

$$F(x) := \frac{1}{1 - \ln(x)}$$

$$F'(x) = \frac{-1}{(1 - \ln(x))^2} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2}$$

Zum Vergleich: $f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2}$

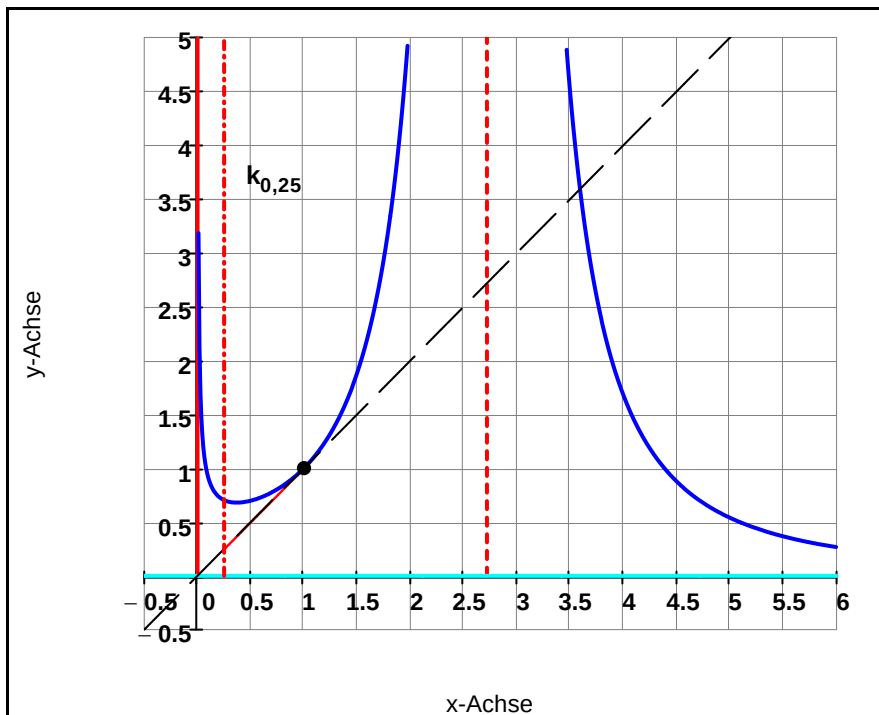
Teilaufgabe 1.8.0

Der Graph von f , die Tangente t und die Gerade k_a mit der Gleichung $x = a$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge 0 < a < 1$ schließen rechts von k_a ein endliches Flächenstück mit der von a abhängigen Maßzahl $A(a)$ des Flächeninhalts ein.

Teilaufgabe 1.8.1 (4 BE)

Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für $a = 0.25$ in Ihrem Schaubild aus 1.4 und zeigen Sie,

dass für $A(a)$ gilt: $A(a) = 0.5 \cdot (a^2 + 1) - \frac{1}{1 - \ln(a)}$.



$$A(a) = \int_a^1 (f(x) - t(x)) dx = F(1) - F(a) - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{1 - \ln(1)} - \frac{1}{1 - \ln(a)} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$A(a) = 1 - \frac{1}{1 - \ln(a)} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) - \frac{1}{1 - \ln(a)}$$

Teilaufgabe 1.8.2 (2 BE)

Untersuchen Sie den Grenzwert von $A(a)$ für $a \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{2} \cdot (a^2 + 1) - \frac{1}{1 - \ln(a)} \right] \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & -\infty \end{array}$$

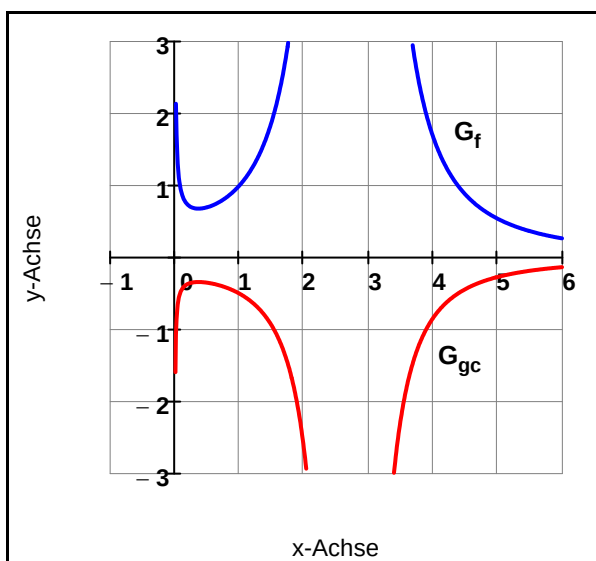
Teilaufgabe 1.9 (4 BE)

Gegeben sind die reellen Funktionen g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$ mit der Definitionsmenge $D_{g_c} = D_f$, wobei $c \in \mathbb{R}$ und $c < -1$. Geben Sie mit Begründung an, wie sich der Graph von g_c im Vergleich zu G_f verändert.

G_{g_c} ist im Vergleich zu G_f an der x-Achse gespiegelt, da $c < 0$.

G_{g_c} ist im Vergleich zu G_f in y-Richtung gestaucht, da $0 < \frac{1}{|c|} < 1$.

$$c := -2 \quad g(x) := \frac{1}{c} \cdot f(x)$$



Teilaufgabe 2.0

In einer Box werden Mehlwürmer als Futter für Schildkröten gezüchtet. Der Bestand der Mehlwürmer in dieser Box wird in Kilogramm [kg] angegeben und nach einem Modell durch die Funktion M mit

$$M(t) = a \cdot e^{b \cdot t} \text{ mit } t, a, b \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0, a > 0, b > 0 \text{ beschrieben.}$$

Dabei gibt t die Zeit in Tagen [d] ab Beobachtungsbeginn an.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden $0.8 \cdot \text{kg}$ Mehlwürmer in die Box eingesetzt. Exakt drei Tage später hat sich ihr Bestand um $2.79 \cdot \text{kg}$ vermehrt.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b .

$$M(t, a, b) := a \cdot e^{b \cdot t}$$

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} := \left[\begin{array}{l} M(0, a, b) = 0.8 \\ M(3, a, b) = (0.8 + 2.79) \end{array} \right] \left| \begin{array}{l} \text{auflösen, } a, b \\ \text{Gleitkommazahl, 4} \end{array} \right. \rightarrow (0.8 \quad 0.5004)$$

Auslesen: $a_0 = 0.8$ $b_0 = 0.5$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = 0.8$ und $b = 0.5$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)

Berechnen Sie die mittlere Zuwachsrate des Mehlwürmerbestands in den ersten vier Tagen des Beobachtungszeitraumes.

$$M(t) := 0.8 \cdot e^{0.5 \cdot t}$$

$$\frac{M(4) - M(0)}{4 - 0} = 1.278$$

Die mittlere Zuwachsrate beträgt ungefähr $1.3 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{d}}$.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)

Berechnen Sie den Bestand an Mehlwürmern, bei dem die momentane Zuwachsrate $1.2 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{d}}$ beträgt.

$$M(t) \rightarrow 0.8 \cdot e^{0.5 \cdot t} \quad M'(t) := \frac{d}{dt} M(t) = 0.4 \cdot e^{0.5 \cdot t}$$

$$t_0 := M'(t) = 1.2 \rightarrow 0.4 \cdot e^{0.5 \cdot t} = 1.2 \text{ auflösen, } t \rightarrow 2.1972245773362193828 \quad t_0 = 2.197$$

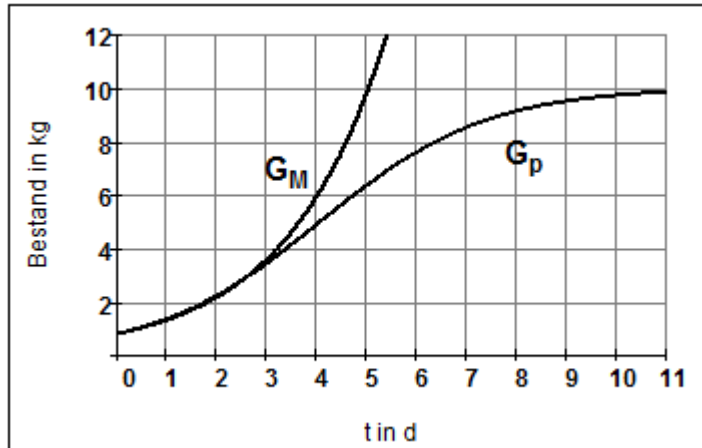
Bestand: $M(t_0) = 2.4$

Teilaufgabe 2.4.0

Durch $M(t)$ wie im obigen Modell wird der Bestand an Mehlwürmern nur für wenige Tage hinreichend genau beschrieben. Der tatsächliche Bestand wird durch die Funktion p

$$\text{mit } p(t) = \frac{0.8 \cdot S}{0.8 + 9.2 \cdot e^{-0.6 \cdot t}}$$

mit $t, S \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, S > 0$ besser erfasst.



Im obigen Diagramm sind die Graphen von M und p abgebildet.



Teilaufgabe 2.4.1 (3 BE)

Entnehmen Sie dem Verlauf von G_p näherungsweise den maximalen Bestand an Mehlwürmern, die in der Box leben können, und folgern Sie hieraus auf den Wert von S .

Maximalwert: $p_{\max} := 10$

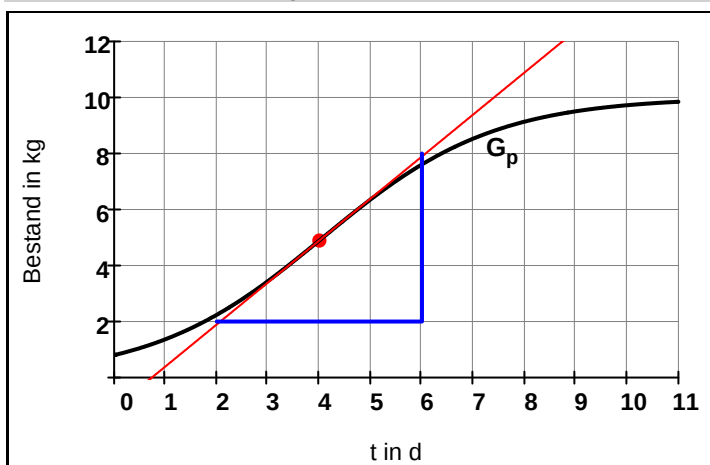
$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{0.8 \cdot S}{0.8 + 9.2 \cdot e^{-0.6 \cdot t}} \right) = 10$$

↓
0

$$\Leftrightarrow \frac{0.8 \cdot S}{0.8 + 0} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad S = 10$$

Teilaufgabe 2.4.2 (4 BE)

Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 2.4.0 die größte momentane Zuwachsrates des Mehlwürmerbestands, wie ihn die Funktion p beschreibt. Beschreiben Sie ihr Vorgehen.



Die größte momentane Zuwachsrates von p liegt an der Wendestelle von G_p :

$$t_w = 4$$

Steigung der Tangente aus dem Steigungsdreieck:

$$m := \frac{8 - 2}{6 - 2} = 1.5$$

Die größte momentane Zuwachsrates beträgt $1.5 \cdot \frac{\text{kg}}{\text{d}}$.