Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Technik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{x\cdot(1-\ln(x))^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und besitzt die y-Achse als Asymptote.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge D_f. Geben Sie die Definitionslücke von f und ihre Art genau an.

1. Bedingung: $x > 0$

2. Bedingung: $(1-\ln(x))^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = e$

Definitionsmenge: $D_f = \,]\,0\,;\,\infty\,[\,\setminus\,\{\,e\,\}$

Definitionslücke: $x = e$ Polstelle ohne VZW

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to e$. Geben Sie die Art und die Gleichungen der daraus folgenden Asymptoten des Graphen von f an.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{(1-\ln(x))^2}}} \to 0$$

$\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = 0$

$$\lim_{x \to e^-} \frac{1}{\underset{e}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underset{1}{\underset{\downarrow}{(1-\ln(x))^2}}} \to \infty$$

$\Rightarrow$ senkrechte Asymptoten: $x = e$

$x = 0$

$$\lim_{x \to e^+} \frac{1}{\underset{e}{\underset{\downarrow}{x}}\cdot\underset{1}{\underset{\downarrow}{(1-\ln(x))^2}}} \to \infty$$

Teilaufgabe 1.3 (11 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von f und ermitteln Sie mithilfe dieser Monotonieintervalle die Art und Koordinaten des relativen Extrempunktes des Graphen von f.
[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3}$]

$$f'(x) = \frac{-\left[1 \cdot (1 - \ln(x))^2 + x \cdot 2 \cdot (1 - \ln(x)) \cdot \frac{-1}{x}\right]}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^4} = (1 - \ln(x)) \cdot \frac{-1 + \ln(x) + 2}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^4}$$

$$f'(x) := \frac{1 + \ln(x)}{x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3}$$

waagrechte Tangenten:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \ln(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{e}$$

Zähler: $z(x) := 1 + \ln(x)$

Nenner: $x^2 \cdot (1 - \ln(x))^3$

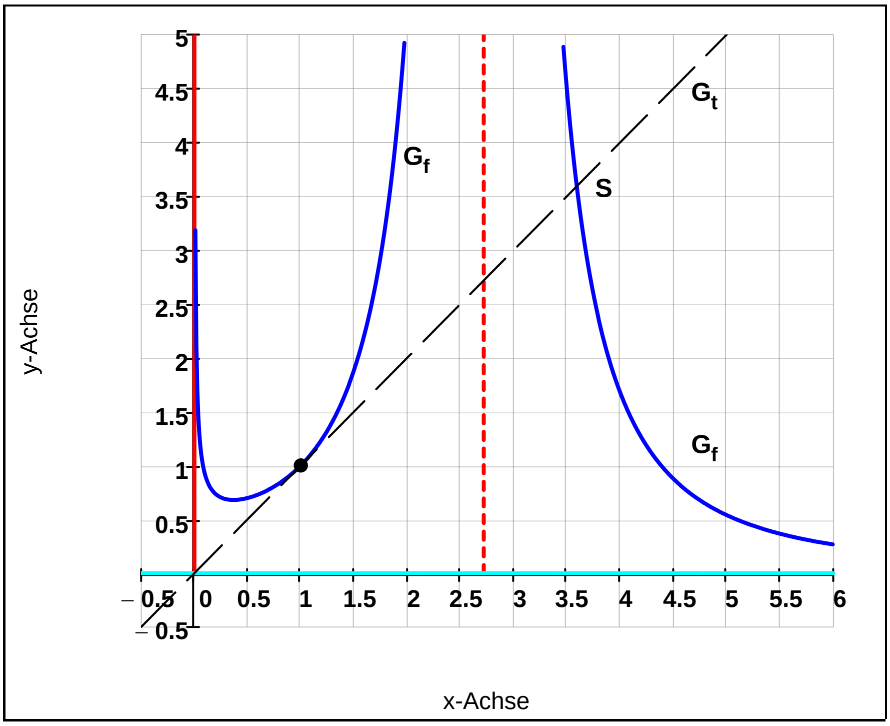
Nennerfaktor: $n(x) := (1 - \ln(x))^3 \qquad x > 0 \wedge x^2 > 0 \qquad y1 := -6 .. 3$

		$x \neq 0$	$x = \frac{1}{e}$	$x \neq e$	
Zähler:	n. d.	neg	pos		pos
Nenner	n. d.	pos	pos		neg
f '(x)	n.d.	neg	pos		neg
G_f	n.d.	smf	sms		smf

G_f ist streng mon. fallend in $]\,0\,;\,\frac{1}{e}\,]$ und in $]\,e\,;\,\infty\,[$. G_f ist streng mon. steigend in $[\,\frac{1}{e}\,;\,e\,[$.

$f\left(\frac{1}{e}\right) \rightarrow \frac{e}{4}$ Tiefpunkt: $T\left(\frac{1}{e}, \frac{e}{4}\right)$

Teilaufgabe 1.4 (6 BE)
Zeichnen Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graphen der Funktion f für $0 < x \le 6$ sowie mit Farbe sämtliche Asymptoten von G_f in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: **1 LE = 2 cm**



Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente t an G_f, die durch den Ursprung verläuft. Zeichnen Sie die Tangente t in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.4 ein.
[Teilergebnis: $t(x) = x$]

Wähle P(u/v) $\in G_f$

Tangente an G_f: $t(x,u) := f'(u)\cdot(x-u) + f(u)$

$$t(x,u) = \frac{1}{u\cdot(\ln(u)-1)^2} + \frac{(u-x)\cdot(\ln(u)+1)}{u^2\cdot(\ln(u)-1)^3}$$

Durch den Ursprung: $t(0,u) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{u\cdot(\ln(u)-1)^2} + \dfrac{\ln(u)+1}{u\cdot(\ln(u)-1)^3} = 0$

Auflösen nach u: $u_0 := t(0,u) = 0 \text{ auflösen}, u \rightarrow 1$

Einsetzen: $t(x) := t(x, u_0)$ $\qquad t(x) = x$

Teilaufgabe 1.6 (5 BE)

Die Tangente t schneidet G_f im Punkt S(x_S | f(x_S)). Berechnen Sie mithilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für die Schnittstelle x_S. Verwenden Sie dazu den Startwert $x_0 = 3.5$, führen Sie zwei Näherungschritte durch und runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$f(x) = t(x) \rightarrow \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} = x$$

Differenzfunktion: $D(x) := f(x) - t(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2} - x$

Ableitung von D(x): $D'(x) := \frac{d}{dx} D(x) = -\frac{1}{x^2 \cdot (\ln(x) - 1)^2} - \frac{2}{x^2 \cdot (\ln(x) - 1)^3} - 1$

Startwert: $x_0 := 3.5$

$$x_1 := x_0 - \frac{D(x_0)}{D'(x_0)} \qquad x_1 = 3.57847$$

$$x_2 := x_1 - \frac{D(x_1)}{D'(x_1)} \qquad x_2 = 3.59088$$

Gerundet: $x_2 = 3.591$

Teilaufgabe 1.7 (3 BE)

Gegeben ist die reelle Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{1 - \ln(x)}$ mit der Definitionsmenge $D_F = D_f$.

Zeigen Sie, dass F eine Stammfunktion von f in D_F ist.

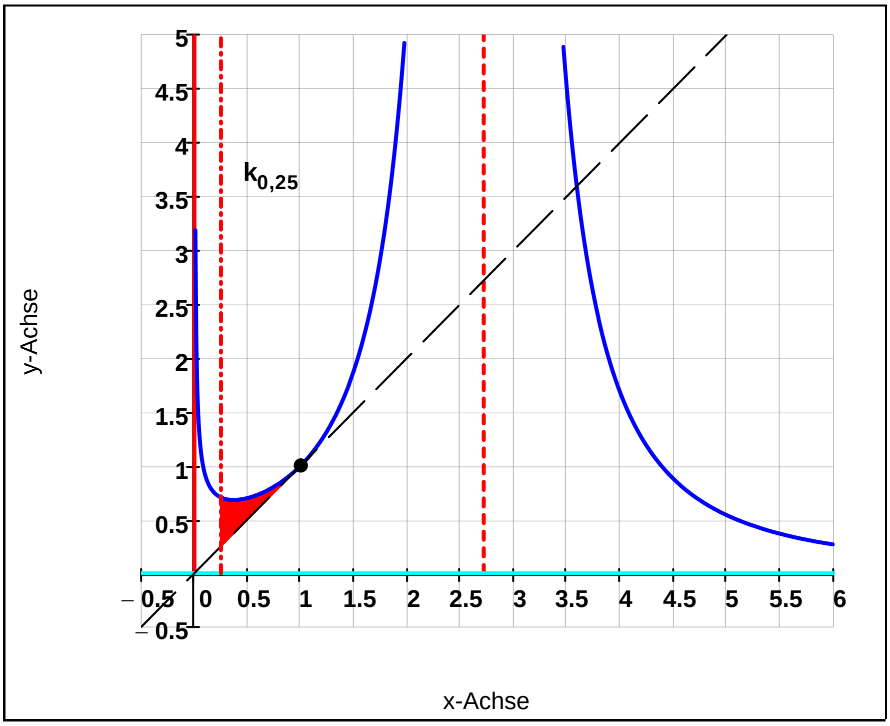
$$F(x) := \frac{1}{1 - \ln(x)}$$

$$F'(x) = \frac{-1}{(1 - \ln(x))^2} \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) = \frac{1}{x \cdot (1 - \ln(x))^2}$$

Zum Vergleich: $f(x) = \frac{1}{x \cdot (\ln(x) - 1)^2}$

Teilaufgabe 1.8.0
Der Graph von f, die Tangente t und die Gerade k_a mit der Gleichung $x = a$ mit $a \in IR \wedge 0 < a < 1$ schließen rechts von k_a ein endliches Flächenstück mit der von a abhängigen Maßzahl $A(a)$ des Flächeninhalts ein.

Teilaufgabe 1.8.1 (4 BE)
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück für $a = 0.25$ in Ihrem Schaubild aus 1.4 und zeigen Sie, dass für $A(a)$ gilt: $A(a) = 0.5\cdot\left(a^2+1\right) - \frac{1}{1-\ln(a)}$.



$$A(a) = \int_a^1 (f(x) - t(x))\,dx = F(1) - F(a) - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{1-\ln(1)} - \frac{1}{1-\ln(a)} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$A(a) = 1 - \frac{1}{1-\ln(a)} - \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(a^2+1\right) - \frac{1}{1-\ln(a)}$$

Teilaufgabe 1.8.2 (2 BE)
Ermitteln Sie den rechtsseitigen Grenzwert von $A(a)$ für $a \rightarrow 0^+$.

$$\lim_{a\rightarrow 0^+} \left[\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\left(a^2+1\right)}_{\downarrow\ 1} - \underbrace{\frac{1}{1-\ln(a)}}_{\downarrow\ -\infty}\right] \rightarrow \frac{1}{2}$$

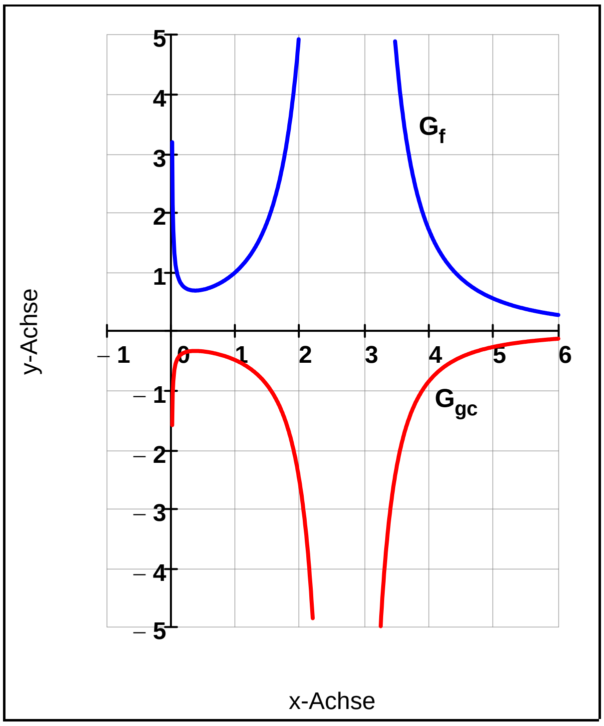
Teilaufgabe 1.9 **(4 BE)**

Gegeben sind die reellen Funktionen g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{c} \cdot f(x)$ mit der Definitionsmenge $D_{g_c} = D_f$, wobei c $\in$ IR und $c < -1$. Geben Sie mit Begründung an, wie sich der Graph von g_c im Vergleich zu G_f verändert.

G_{g_c} ist im Vergleich zu G_g an der x-Achse gespiegelt, da $c < 0$.

G_{g_c} ist im Vergleich zu G_g in y-Richtung gestaucht, da $0 < \frac{1}{|c|} < 1$.

$c := -2 \qquad g(x) := \frac{1}{c} \cdot f(x)$



Teilaufgabe 2.0
In einer Box werden Mehlwürmer als Futter für Schildkröten gezüchtet. Der Bestand der Mehlwürmer in dieser Box wird in Kilogramm [kg] angegeben und nach einem Modell durch die Funktion M mit

$M(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ mit $t, a, b \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0, a > 0, b > 0$ beschrieben.
Dabei gibt t die Zeit in Tagen [d] ab Beobachtungsbeginn an.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden $0.8 \cdot kg$ Mehlwürmer in die Box eingesetzt. Exakt drei Tage später hat sich ihr Bestand um $2.79 \cdot kg$ vermehrt.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b.

$M(t, a, b) := a \cdot e^{b \cdot t}$

$M(0, a, b) = 0.8 \rightarrow a = 0.8$

$M(3, a, b) = (0.8 + 2.79) \rightarrow a \cdot e^{3 \cdot b} = 3.59$

Auflösen nach b: $b := \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{3.59}{0.8}\right)$ $b = 0.50043$ gerundet: $b = 0.5$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = 0.8$ und $b = 0.5$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Berechnen Sie die mittlere Zuwachsrate des Mehlwürmerbestands in den ersten vier Tagen des Beobachtungszeitraumes.

$M(t) := 0.8 \cdot e^{0.5 \cdot t}$

$\frac{M(4) - M(0)}{4 - 0} = 1.278$

Die mittlere Zuwachsrate beträgt ungefähr $1.3 \cdot \frac{kg}{d}$.

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Berechnen Sie den Bestand an Mehlwürmern, bei dem die momentane Zuwachsrate $1.2 \cdot \frac{kg}{d}$ beträgt.

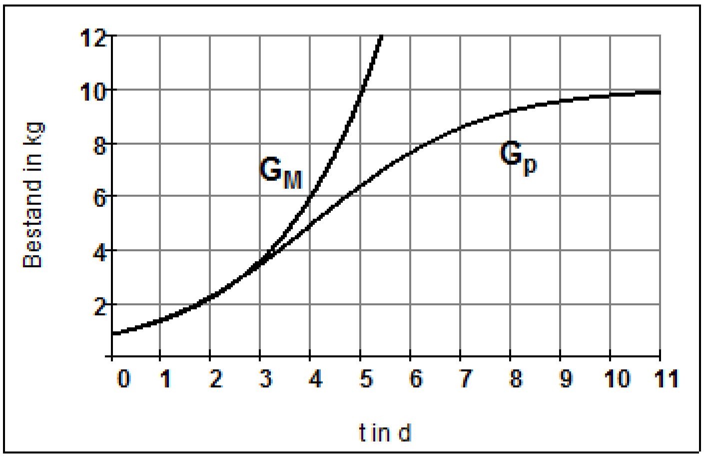
$M(t) \rightarrow 0.8 \cdot e^{0.5 \cdot t}$ $M'(t) := \frac{d}{dt} M(t) = 0.4 \cdot e^{0.5 \cdot t}$

$M'(t) = 1.2 \rightarrow 0.4 \cdot e^{0.5 \cdot t} = 1.2$ $t_0 := \frac{1}{0.5} \cdot \ln\left(\frac{1.2}{0.4}\right)$ $t_0 = 2.197$ $M(t_0) = 2.4$

Teilaufgabe 2.4.0
Durch $\mathbf{M}(\mathbf{t})$ wie im obigen Modell wird der Bestand an Mehlwürmern nur für wenige Tage hinreichend genau beschrieben. Der tatsächliche Bestand wird durch die Funktion p

mit $\mathbf{p}(\mathbf{t}) = \dfrac{0.8 \cdot S}{0.8 + 9.2 \cdot e^{-0.6 \cdot t}}$

mit t, S $\in$ IR und $t \geq 0$, $S > 0$
besser erfasst.



Im obigen Diagramm sind die Graphen von M und p abgebildet.

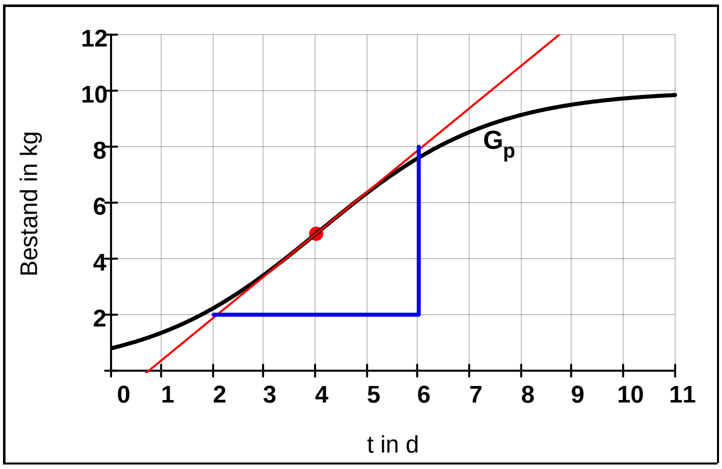
Teilaufgabe 2.4.1 **(3 BE)**
Entnehmen Sie dem Verlauf von G_p näherungsweise den maximalen Bestand an Mehlwürmern, die in der Box leben können, und folgern Sie hieraus auf den Wert von S.

Maximalwert: $p_{max} := 10$

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = 10 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \left(\frac{0.8 \cdot S}{0.8 + 9.2 \cdot \underbrace{e^{-0.6 \cdot t}}_{\downarrow \; 0}} \right) = 10$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{0.8 \cdot S}{0.8 + 0} = 10 \quad \Leftrightarrow \quad S = 10$$

Teilaufgabe 2.4.2 **(4 BE)**
Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung aus 2.4.0 die größte momentane Zuwachsrate des Mehlwürmerbestands, wie ihn die Funktion p beschreibt.
Beschreiben Sie ihr Vorgehen.



Die größte momentane Zuwachsrate von p liegt an der Wendestelle von G_p:

$t_w = 4$

Steigung der Tangente aus dem Steigungsdreieck:

$$m := \frac{8-2}{6-2} = 1.5$$

Die größte momentane Zuwachsrate beträgt $1.5 \cdot \frac{kg}{d}$.