Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Technik - B I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensystm des IR^3 sind die Punkte **A(8 | 5 | 6)**, **B(4 | 1 | −1)**, $P_a(2 \mid a \mid -1)$ und $Q_b(-2\cdot b \mid b \mid b+1)$ mit $a, b \in \mathbb{IR}$ sowie die Geraden h_1 und h_2 gegeben.

$$h_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \lambda \in IR; \quad h_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mu \in IR;$$

Die Geraden h_1 und h_2 spannen eine Ebene auf.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

Verbindungsvektor der Aufpunkte:

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ebene E in Parameterform:

$$x_E(\lambda, \tau) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$n_E := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot n_E = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Ebene **E:** $4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 7\cdot x_3 - 13 = 0$ schneidet die x_1-x_3-Ebene in der Geraden s.

Ermitteln Sie eine Gleichung von s.

$$E(x_1, x_2, x_3) := 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 7\cdot x_3 - 13$$

$x_2 = 0$ $\quad E(x_1, 0, x_3) = 0 \rightarrow 4\cdot x_1 + 7\cdot x_3 - 13 = 0$ $\quad$ Wähle $\quad x_1(\lambda) := \lambda$

$$E(x_1(\lambda), 0, x_3) = 0 \rightarrow 4\cdot\lambda + 7\cdot x_3 - 13 = 0 \ \text{auflösen}, x_3 \ \rightarrow \frac{13}{7} - \frac{4\cdot\lambda}{7}$$

Spurgerade s: $\quad x_s(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \frac{13}{7} - \frac{4\cdot\lambda}{7} \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)
Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt P_a.
Ermitteln Sie eine Gleichung von g.

$$\mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{OP}(a) := \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

P_a in Ebene E einsetzen: $\mathbf{E}(2, a, -1) = 0 \rightarrow 4 \cdot a - 12 = 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow 3$

Richtungsvektor Gerade g: $\mathbf{u_g} := \mathbf{OA} - \mathbf{OP}(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gerade g: $\mathbf{x_g}(\sigma) := \mathbf{OP}(3) + \sigma \cdot \mathbf{u_g} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot \sigma + 2 \\ 2 \cdot \sigma + 3 \\ 7 \cdot \sigma - 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes A', der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.

Lotgerade l durch A: $\mathbf{x_l}(\tau) := \mathbf{OA} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot \tau + 8 \\ 4 \cdot \tau + 5 \\ 7 \cdot \tau + 6 \end{pmatrix}$

$\mathbf{l} \cap$ E: $\mathbf{E}(4 \cdot \tau + 8, 4 \cdot \tau + 5, 7 \cdot \tau + 6) = 0 \rightarrow 81 \cdot \tau + 81 = 0 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow -1$

Ortsvektor Lotfußpunkt: Verbindungvektor:

$$\mathbf{OL} := \mathbf{x_l}(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{AL} := \mathbf{OL} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Abstand: $\mathbf{d} := |\mathbf{AL}| = 9$

Ortsvektor Spiegelpunkt: Spiegelpunkt:

$$\mathbf{OA'} := \mathbf{OA} + 2 \cdot \mathbf{AL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A'} := \mathbf{OA'}^{T} \rightarrow (0 \quad -3 \quad -8)$$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BQ_b}$ orthogonal sind, und prüfen Sie weiterhin, ob es Werte für den Parameter b gibt, sodass diese Vektoren parallel sind.

$$OB := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad OQ(b) := \begin{pmatrix} -2\cdot b \\ b \\ b+1 \end{pmatrix}$$

$$BA := OA - OB = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad BQ(b) := OQ(b) - OB \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot b - 4 \\ b-1 \\ b+2 \end{pmatrix}$$

senkrecht: $BA\cdot BQ(b) = 0 \rightarrow 3\cdot\overline{b} - 6 = 0 \text{ auflösen}, \overline{b} \rightarrow 2$

parallel: $k\cdot BA = BQ(b) \rightarrow \begin{pmatrix} 4\cdot k \\ 4\cdot k \\ 7\cdot k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot b - 4 \\ b-1 \\ b+2 \end{pmatrix} \text{ auflösen}, k, b \rightarrow$

keine Lösung möglich

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Gegeben ist die dreiseitige Pyramide ABQ_bP_3.

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieser Pyramide in Abhängigkeit vom Parameter b und bestimmen Sie anschließend alle Werte für b so, dass die Maßzahl des Volumens 42 wird.

Pyramide wird vom Punkt B aus aufgespannt durch die Vektoren:

$$u := BA = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad v(b) := OQ(b) - OB \rightarrow \begin{pmatrix} -2\cdot b - 4 \\ b-1 \\ b+2 \end{pmatrix} \qquad w := OP(3) - OB = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $(u \times w)\cdot v(b) \rightarrow 30\cdot\overline{b} + 102$

Volumen: $V(b) := \left| \frac{(u \times w)\cdot v(b)}{6} \right| \rightarrow \left|5\cdot\overline{b} + 17\right|$

$5\cdot b + 17 = 42 \text{ auflösen}, b \rightarrow 5$

$5\cdot b + 17 = -42 \text{ auflösen}, b \rightarrow -\frac{59}{5}$

Teilaufgabe 1.7 **(8 BE)**

Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar f_c:

$$f_c:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \kappa, c \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie **ohne CAS**, für welche Werte von c sich die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

mit $\upsilon \in \mathbb{R}$ mit einer Geraden aus der Geradenschahr f_c schneidet.

Gerade g: $$x_g(\upsilon) := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Geradenschar f_c $$x_f(\kappa, c) := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g \cap f_c$: $$x_g(\upsilon) = x_f(\kappa, c) \rightarrow \begin{pmatrix} 6\cdot\upsilon + 8 \\ 2\cdot\upsilon + 5 \\ 7\cdot\upsilon + 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa\cdot(c - 1.5) + 6 \\ \kappa\cdot c^2 + 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Zeile: $6 + 7\cdot\upsilon = 4$ **auflösen**, $\upsilon \rightarrow -\frac{2}{7}$ $\qquad \upsilon = -\frac{2}{7}$

1. Zeile: $8 + 6\cdot\left(\frac{-2}{7}\right) = 6 + \kappa\cdot(c - 1.5)$

2. Zeile: $5 + 2\cdot\left(\frac{-2}{7}\right) = 5 + \kappa\cdot c^2 \Leftrightarrow \qquad \kappa\cdot c^2 = \frac{-4}{7}$

Falls $c \neq 0$ $\qquad \kappa = \frac{-4}{7\cdot c^2}$

$$8 + 6\cdot\left(\frac{-2}{7}\right) = 6 + \frac{-4}{7\cdot c^2}\cdot\left(c - \frac{3}{2}\right) \text{ auflösen}, c \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es existieren Schnittpunkte für $c_1 = -3$ bzw. $c_2 = 1$

Falls $c = 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

2. Möglichkeit:

Richtungsvektor von g: Richtungsvektor von f_c: Verbindungsvektor der Aufpunkte:

$$u_g := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad u_f(c) := \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad w_{verb} := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Geraden sind nicht parallel.

Sind die Vektoren $u_g, u_f(c), w_{verb}$ linear abhängig? $\Leftrightarrow$ Spatprodukt berechnen.

$$u_g \times w_{verb} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad u_f(c) \cdot \left(u_g \times w_{verb}\right) = 0 \rightarrow 4 \cdot c + 2 \cdot c^2 - 6.0 = 0$$

$$4 \cdot c + 2 \cdot c^2 - 6.0 = 0 \text{ auflösen}, c \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

Für $c_1 = -3$ bzw. $c_2 = 1$ sind die Vektoren linear abhängig, also gibt es Schnittpunkte, sonst nicht.

3. Möglichkeit:

$g \cap f_c$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \upsilon \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix aufstellen:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \kappa & \upsilon & \end{array} \\ \begin{pmatrix} c - 1.5 & -6 & 2 \\ c^2 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow[\text{falls } c \neq 1.5]{(c - 1.5) \cdot II - c^2 \cdot I} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \kappa & \upsilon & \end{array} \\ \begin{pmatrix} c - 1.5 & -6 & 2 \\ 0 & 6 \cdot c^2 - 2 \cdot c + 3 & -2 \cdot c^2 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

NR

$$\left(c - \frac{3}{2}\right)\cdot(-2) - c^2\cdot(-6) \text{ vereinfachen } \rightarrow 6\cdot c^2 - 2\cdot c + 3$$

$$-2\cdot c + 3 + 6\cdot c^2 = 0 \text{ auflösen } \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17}\cdot i}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{17}\cdot i}{6} \end{pmatrix}$$ keine Lösung

$$\left(6\cdot c^2 - 2\cdot c + 3\right)\cdot III - (-7)\cdot II$$
$$\text{--------------------------------------->} \quad \begin{array}{ccc} \kappa & \upsilon & \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} c - 1.5 & -6 & 2 \\ 0 & 6\cdot c^2 - 2\cdot c + 3 & -2\cdot c^2 \\ 0 & 0 & 6 - 4\cdot c - 2\cdot c^2 \end{pmatrix}$$

$$\left(6\cdot c^2 - 2\cdot c + 3\right)\cdot 2 - (-7)\cdot\left(-2\cdot c^2\right) \left|\begin{array}{l}\text{vereinfachen} \\ \text{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow 6 - 4\cdot c - 2\cdot c^2 \text{ erweitern } \rightarrow 6 - 4\cdot c - 2\cdot c^2$$

Gleichungssystem ist lösbar, falls gilt: $6 - 4\cdot c - 2\cdot c^2 = 0 \text{ auflösen}, c \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Für $c_1 = 1$ bzw. $c_2 = -3$ gibt es Schnittpunkte, sonst nicht.

Sonderfall $c = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{cc} \kappa & \upsilon \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ \frac{9}{4} & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{-2\cdot III - (-7)\cdot II} \quad \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ \frac{9}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$ Widerspruch