

Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

• Mathematik 12 Technik - B I - Lösung



Teilaufgabe 1.0

In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Punkte $A(8 \mid 5 \mid 6)$, $B(4 \mid 1 \mid -1)$, $P_a(2 \mid a \mid -1)$ und $Q_b(-2 \cdot b \mid b \mid b + 1)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ sowie die Geraden h_1 und h_2 gegeben.

$$h_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}; \quad h_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R};$$

Die Geraden h_1 und h_2 spannen eine Ebene auf.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.

Verbindungsvektor der Aufpunkte:

$$\mathbf{v} := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ebene E in Parameterform:

$$\mathbf{x}_E(\lambda, \tau) := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$\mathbf{n}_E := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Normalenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right] \cdot \mathbf{n}_E = 0$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Die Ebene $E: 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 - 13 = 0$ schneidet die x_1 - x_3 -Ebene in der Geraden s.

Ermitteln Sie eine Gleichung von s.

$$E(x_1, x_2, x_3) := 4 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 - 13$$

$$x_2 = 0 \quad E(x_1, 0, x_3) = 0 \rightarrow 4 \cdot x_1 + 7 \cdot x_3 - 13 = 0 \quad \text{Wähle} \quad x_1(\lambda) := \lambda$$

$$E(x_1(\lambda), 0, x_3) = 0 \rightarrow 4 \cdot \lambda + 7 \cdot x_3 - 13 = 0 \text{ auflösen, } x_3 \rightarrow \frac{13}{7} - \frac{4 \cdot \lambda}{7}$$

$$\text{Spurgerade s:} \quad \mathbf{x}_s(\lambda) := \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \frac{13}{7} - \frac{4 \cdot \lambda}{7} \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3 (3 BE)

Die Gerade g geht durch den Punkt A und schneidet die Ebene E im Punkt P_a .
Ermitteln Sie eine Gleichung von g .

$$\mathbf{OA} := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{OP}(a) := \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

P_a in Ebene E einsetzen: $E(2, a, -1) = 0 \rightarrow 4 \cdot a - 12 = 0$ auflösen, $a \rightarrow 3$

Richtungsvektor Gerade g : $\mathbf{u}_g := \mathbf{OA} - \mathbf{OP}(3) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

Gerade g : $\mathbf{x}_g(\sigma) := \mathbf{OP}(3) + \sigma \cdot \mathbf{u}_g \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot \sigma + 2 \\ 2 \cdot \sigma + 3 \\ 7 \cdot \sigma - 1 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)

Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Ebene E sowie die Koordinaten des Spiegelpunktes A' , der durch Spiegelung des Punktes A an der Ebene E entsteht.

Lotgerade l durch A : $\mathbf{x}_l(\tau) := \mathbf{OA} + \tau \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \cdot \tau + 8 \\ 4 \cdot \tau + 5 \\ 7 \cdot \tau + 6 \end{pmatrix}$

$l \cap E$: $E(4 \cdot \tau + 8, 4 \cdot \tau + 5, 7 \cdot \tau + 6) = 0 \rightarrow 81 \cdot \tau + 81 = 0$ auflösen, $\tau \rightarrow -1$

Ortsvektor Lotfußpunkt:

Verbindungsvektor:

$$\mathbf{OL} := \mathbf{x}_l(-1) \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{AL} := \mathbf{OL} - \mathbf{OA} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$$

Abstand: $d := |\mathbf{AL}| = 9$

Ortsvektor Spiegelpunkt:

Spiegelpunkt:

$$\mathbf{OA}' := \mathbf{OA} + 2 \cdot \mathbf{AL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' := \mathbf{OA}'^T \rightarrow (0 \quad -3 \quad -8)$$

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Prüfen Sie, ob es einen Wert für den Parameter b gibt, sodass die Vektoren \vec{BA} und \vec{BQ}_b orthogonal sind.

$$\vec{OB} := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{OQ}(b) := \begin{pmatrix} -2 \cdot b \\ b \\ b + 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BA} := \vec{OA} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{BQ}(b) := \vec{OQ}(b) - \vec{OB} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot b - 4 \\ b - 1 \\ b + 2 \end{pmatrix}$$

senkrecht: $\vec{BA} \cdot \vec{BQ}(b) = 0 \rightarrow 3 \cdot b - 6 = 0$ auflösen, $b \rightarrow 2 \Rightarrow b = 2$

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)

Gegeben ist die dreiseitige Pyramide ABQ_bP_3 .

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABQ_2P_3 .

Pyramide wird vom Punkt B aus aufgespannt durch die Vektoren:

$$\vec{u} := \vec{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{v}(b) := \vec{OQ}(b) - \vec{OB} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \cdot b - 4 \\ b - 1 \\ b + 2 \end{pmatrix} \quad \vec{w} := \vec{OP}(3) - \vec{OB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spatprodukt: $(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}(b) \rightarrow 30 \cdot b + 102$

Volumen: $V(b) := \left| \frac{(\vec{u} \times \vec{w}) \cdot \vec{v}(b)}{6} \right| \rightarrow |5 \cdot b + 17|$

$$5 \cdot b + 17 = 42 \text{ auflösen, } b \rightarrow 5 \Rightarrow b = 5$$

$$5 \cdot b + 17 = -42 \text{ auflösen, } b \rightarrow -\frac{59}{5} \Rightarrow b = -\frac{59}{5}$$

Teilaufgabe 1.7 (8 BE)

Gegeben ist zusätzlich die Geradenschar f_c :

$$f_c: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \kappa, c \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie, für welche Werte von c sich die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ mit } \nu \in \mathbb{R} \text{ mit einer Geraden aus der Geradenschar } f_c \text{ schneidet.}$$

Gerade g :
$$\mathbf{x}_g(\nu) := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Geradenschar f_c :
$$\mathbf{x}_f(\kappa, c) := \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} c - 1.5 \\ c^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g \cap f_c$:
$$\mathbf{x}_g(\nu) = \mathbf{x}_f(\kappa, c) \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \cdot \nu + 8 \\ 2 \cdot \nu + 5 \\ 7 \cdot \nu + 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa \cdot (c - 1.5) + 6 \\ \kappa \cdot c^2 + 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

3. Zeile: $6 + 7 \cdot \nu = 4$ auflösen, $\nu \rightarrow -\frac{2}{7}$ $\nu = -\frac{2}{7}$

1. Zeile: $8 + 6 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 6 + \kappa \cdot (c - 1.5)$

2. Zeile: $5 + 2 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 5 + \kappa \cdot c^2 \Leftrightarrow \kappa \cdot c^2 = -\frac{4}{7}$

Falls $c \neq 0$
$$\kappa = \frac{-4}{7 \cdot c^2}$$

$$8 + 6 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = 6 + \frac{-4}{7 \cdot c^2} \cdot \left(c - \frac{3}{2}\right) \text{ auflösen, } c \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es existieren Schnittpunkte für $c_1 = -3$ bzw. $c_2 = 1$

Falls $c = 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

2. Möglichkeit:

Richtungsvektor von g:

$$\mathbf{u}_g := \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor von f_c:

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{c}) := \begin{pmatrix} \mathbf{c} - 1.5 \\ \mathbf{c}^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor der Aufpunkte:

$$\mathbf{w}_{\text{verb}} := \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektoren der Geraden sind nicht parallel.

Sind die Vektoren $\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_f(\mathbf{c}), \mathbf{w}_{\text{verb}}$ linear abhängig? \Leftrightarrow Spatprodukt berechnen.

$$\mathbf{u}_g \times \mathbf{w}_{\text{verb}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_f(\mathbf{c}) \cdot (\mathbf{u}_g \times \mathbf{w}_{\text{verb}}) = 0 \rightarrow 4 \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{c}^2 - 6 \cdot 0 = 0$$

$$4 \cdot \mathbf{c} + 2 \cdot \mathbf{c}^2 - 6 \cdot 0 = 0 \text{ auflösen, } \mathbf{c} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 \\ -3.0 \end{pmatrix}$$

Für $\mathbf{c}_1 = -3$ bzw. $\mathbf{c}_2 = 1$ sind die Vektoren linear abhängig, also gibt es Schnittpunkte, sonst nicht.

3. Möglichkeit:

$g \cap f_c$:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \kappa \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{c} - 1.5 \\ \mathbf{c}^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Gaußmatrix aufstellen:

$$\begin{array}{ccc} \kappa & \nu & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{c} - 1.5 & -6 & 2 \\ \mathbf{c}^2 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} (\mathbf{c} - 1.5) \cdot \text{II} - \mathbf{c}^2 \cdot \text{I} \\ \text{falls } \mathbf{c} \neq 1.5 \end{array} & \begin{array}{ccc} \kappa & \nu & \\ \begin{pmatrix} \mathbf{c} - 1.5 & -6 & 2 \\ 0 & 6 \cdot \mathbf{c}^2 - 2 \cdot \mathbf{c} + 3 & -2 \cdot \mathbf{c}^2 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}$$

NR

$$\left(c - \frac{3}{2}\right) \cdot (-2) - c^2 \cdot (-6) \text{ vereinfachen} \rightarrow 6 \cdot c^2 - 2 \cdot c + 3$$

$$-2 \cdot c + 3 + 6 \cdot c^2 = 0 \text{ auflösen} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{17} \cdot i}{6} \\ \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{17} \cdot i}{6} \end{pmatrix} \text{ keine Lösung}$$

$$\begin{array}{c} \kappa \quad \quad \quad \nu \\ (6 \cdot c^2 - 2 \cdot c + 3) \cdot \text{III} - (-7) \cdot \text{II} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} c - 1.5 & -6 & 2 \\ 0 & 6 \cdot c^2 - 2 \cdot c + 3 & -2 \cdot c^2 \\ 0 & 0 & 6 - 4 \cdot c - 2 \cdot c^2 \end{pmatrix}$$

$$(6 \cdot c^2 - 2 \cdot c + 3) \cdot 2 - (-7) \cdot (-2 \cdot c^2) \left| \begin{array}{l} \text{vereinfachen} \\ \text{erweitern} \end{array} \right. \rightarrow 6 - 4 \cdot c - 2 \cdot c^2 \text{ erweitern} \rightarrow 6 - 4 \cdot c - 2 \cdot c^2$$

Gleichungssystem ist lösbar, falls gilt: $6 - 4 \cdot c - 2 \cdot c^2 = 0$ auflösen, $c \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Für $c_1 = 1$ bzw. $c_2 = -3$ gibt es Schnittpunkte, sonst nicht.

Sonderfall $c = \frac{3}{2}$

$$\begin{array}{c} \kappa \quad \nu \\ \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ \frac{9}{4} & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{-2 \cdot \text{III} - (-7) \cdot \text{II}} \begin{array}{c} \kappa \quad \nu \\ \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ \frac{9}{4} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \text{Widerspruch} \end{array}$$