Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Technik - B II - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0
Ein Meeresgebiet ist festgelegt durch die Koordinaten eines ruhenden Forschungsschiffes F(6000| 1000| 0), den Fußpunkt eines Leuchtturms L(200| 5000| 0) sowie eines zunächst an der Wasseroberfläche fahrenden Unterseeboots mit U_k(40-2k| -20| 0) mit k $\in$ R.

Die angegebenen Koordinaten stellen Punkte in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem dar. Seegang, Drift und Wind sowie die Erdkrümmung bleiben bei den Berechnungen unberücksichtigt.
Die Koordinaten sind alle in Metern angegeben, auf das Mitführen der Einheit Meter kann bei den Berechnungen verzichtet werden.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)
Zeigen Sie, dass sich das U-Boot geradlinig auf der Wasseroberfläche bewegt, und berechnen Sie den minimalen Abstand des U-Bootes vom Forschungsschiff.

Ortsvektor des Unterseebootes:

Gerade g: $\overrightarrow{OU_k} = \begin{pmatrix} 40-2k \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Das ist eine Geradengleichung mit $x_3 = 0$.

Gerade g in CAS:

$$x_g(k) := \begin{pmatrix} 40 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor Forschungsschiff:

$$OF := \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wählen Sie einen beliebigen Punkt G $\in$ g (allgemeiner Geradenpunkt):

$$GF(k) := \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40-2k \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot k + 5960 \\ 1020 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g \perp \overrightarrow{GF}$:

$$k_0 := GF(k) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow -4 \cdot k - 11920 = 0 \text{ auflösen}, k \rightarrow -2980$$

$k_0 = -2980$ in g insetzen:

Ortsvektor Lotfußpunkt K:

$$OK := x_g(k_0) = \begin{pmatrix} 6000 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verbindungsvektor von K und F:

$$KF := OF - OK \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1020 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Abstand: $d_{KF} := |KF|$ $d_{KF} = 1020$

Teilaufgabe 1.2.0
Für die folgenden Aufgaben gilt k=10, somit U_{10}(20| -20| 0).

Teilaufgabe 1.2.1 (6 BE)
Untersuchen Sie, ob sich ein Blauwal an der Position B(1587| 2243| 0) außerhalb oder innerhalb des von den Punkten F, L und U_{10} begrenzten Seegebiets aufhält.
Berechnen Sie, welchem der drei Punkte der Blauwal am nächsten liegt.

Ortsvektor Unterseeboot:

$$OU_{10} := \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor Blauwaal:

$$OB := \begin{pmatrix} 1597 \\ 2243 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor Forschungsschiff:

$$OF := \begin{pmatrix} 6000 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor Leuchtturm:

$$OL := \begin{pmatrix} 200 \\ 5000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Idee: Vektor $\overrightarrow{FB}$ als Linearkombination der Vektoren $\overrightarrow{FU_{10}}$ und $\overrightarrow{FL}$ darstellen.

$$FU_{10} := OU_{10} - OF = \begin{pmatrix} -5980 \\ -1020 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad FL := OL - OF = \begin{pmatrix} -5800 \\ 4000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$FB := OB - OF = \begin{pmatrix} -4403 \\ 1243 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellen des Gleichungssystems:

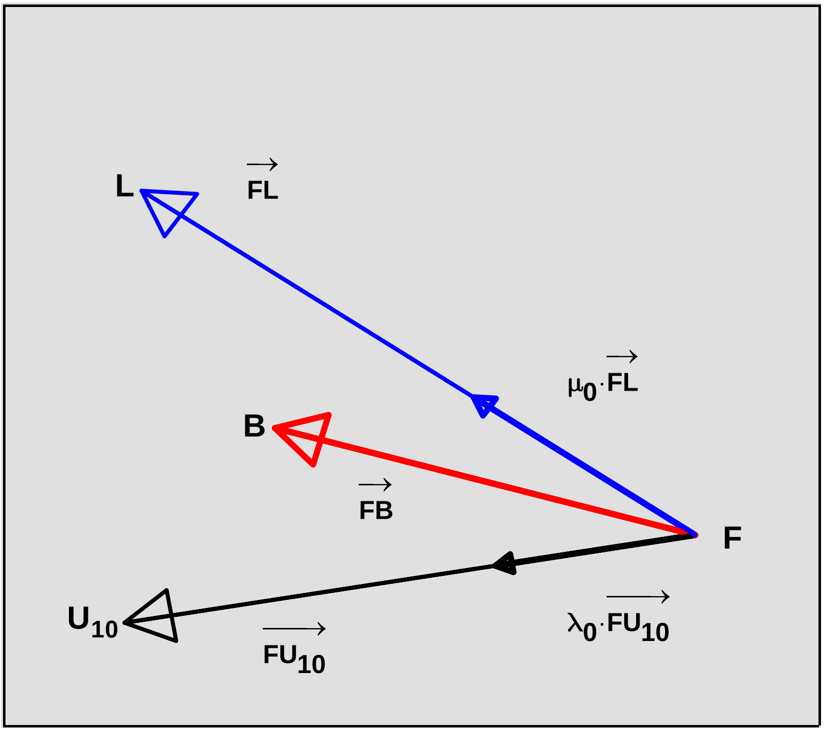
$$\lambda \cdot FU_{10} + \mu \cdot FL = FB \rightarrow \begin{pmatrix} -5800 \cdot \mu - 5980 \cdot \lambda \\ 4000 \cdot \mu - 1020 \cdot \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4403 \\ 1243 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & \mu_0 \end{pmatrix} := \lambda \cdot FU_{10} + \mu \cdot FL = FB \text{ auflösen}, \lambda, \mu \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{52013}{149180} & \frac{59621}{149180} \end{pmatrix}$$

Auslesen der Parameter:

$$\lambda_0 = \frac{52013}{149180} = 0.349 \qquad \mu_0 = \frac{59621}{149180} = 0.400$$



Abstand zwischen B und L: $|OL - OB| = 3091$

Abstand zwischen B und U_{10}: $|OU_{10} - OB| = 2758$ kleinster Abstand

Abstand zwischen B und F: $|OF - OB| = 4575$

Der Blauwaal ist dem Unterseeboot am nächten.

Teilaufgabe 1.2.2 (4 BE)
Funksignale werden zwischen Forschungsschiff F, der Spitze des Leuchtturms S(200| 5000| 50) und dem Unterseeboot ausgetauscht.
Die Punkte F, S und U_{10} liegen in einer Ebene E. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: E: $51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000 = 0$]

Ortsvektor Spitze Leuchtturm: $OS := \begin{pmatrix} 200 \\ 5000 \\ 50 \end{pmatrix}$

E: $\overrightarrow{x_E} = \overrightarrow{OF} + \rho \cdot \overrightarrow{FS} + \tau \cdot \overrightarrow{FU_{10}}$

$$x_E(\rho, \tau) := OF + \rho \cdot (OS - OF) + \tau \cdot (OU_{10} - OF)$$

$$x_E(\rho,\tau) = \begin{pmatrix} 6000 - 5980\cdot\tau - 5800\cdot\rho \\ 4000\cdot\rho - 1020\cdot\tau + 1000 \\ 50\cdot\rho \end{pmatrix}$$

Normalenvektor:

$$(OS - OF) \times (OU_{10} - OF) = \begin{pmatrix} 51000 \\ -299000 \\ 29836000 \end{pmatrix} \qquad n_E := \begin{pmatrix} 51 \\ -299 \\ 29836 \end{pmatrix}$$

Vektorielle Normalenform: Koordinatenform:

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - OF\right]\cdot n_E = 0 \rightarrow 51\cdot x_1 - 299\cdot x_2 + 29836\cdot x_3 - 7000 = 0$$

Teilaufgabe 1.2.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die sowohl in der Wasseroberfläche als auch in der Ebene E aus 1.2.2 liegen.

Wasseroberfläche O: $x_3 = 0$

Ebene E: $E(x_1, x_2, x_3) := 51x_1 - 299x_2 + 29836x_3 - 7000$

O ∩ E: $51x_1 - 299x_2 - 7000 = 0$ $\quad E(x_1, x_2, 0) = 0 \rightarrow 51\cdot x_1 - 299\cdot x_2 - 7000 = 0$

Wähle: $x_2 = \lambda$

$$E(x_1, \lambda, 0) = 0 \rightarrow 51\cdot x_1 - 299\cdot\lambda - 7000 = 0$$

$$51x_1 - 299\lambda - 7000 = 0 \text{ auflösen}, x_1 \rightarrow \frac{299\cdot\lambda}{51} + \frac{7000}{51}$$

Schnittgerade s: $$\vec{x}_S = \begin{pmatrix} \frac{299\cdot\lambda}{51} + \frac{7000}{51} \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7000}{51} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} \frac{299}{51} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3.0

Von der Position $\mathbf{U_{10}}$ taucht das U-Boot geradlinig in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}$ bis in eine Wassertiefe von 200 Metern zum Tauchpunkt T ab.

Teilaufgabe 1.3.1 (5 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des Tauchpunktes T und die beim Tauchvorgang zurückgelegte Strecke. Runden Sie auf ganze Meter.

Richtungsvektor: Tauchgerade h:

$$\mathbf{u} := \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix} \qquad x_h(\tau) := \mathbf{OU_{10}} + \tau \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 120\cdot\tau + 20 \\ 300\cdot\tau - 20 \\ -100\cdot\tau \end{pmatrix}$$

Tauchtiefe: $\tau_0 := x_h(\tau)_3 = -200 \rightarrow -100\cdot\tau = -200 \text{ auflösen}, \tau \rightarrow 2$

$\Rightarrow \qquad \tau_0 = 2$

Tauchendpunkt: $\mathbf{OT} := x_h(\tau_0) = \begin{pmatrix} 260 \\ 580 \\ -200 \end{pmatrix}$

Abstand: $\mathbf{d} := \left|\mathbf{OU_{10}} - \mathbf{OT}\right| \qquad \mathbf{d} = 676.461$

gerundet: $\mathbf{d} = 676$ Meter

Teilaufgabe 1.3.2 (4 BE)
Laut Herstellervorgaben darf das Tauchboot beim Tauchvorgang einen maximalen Tauchwinkel von 16 Grad gegenüber der Horizontalen nicht überschreiten.
Prüfen Sie das Einhalten der Vorgaben durch Berechnung.

$$\cos(\alpha) := \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}\right|}{1 \cdot \left|\begin{pmatrix} 120 \\ 300 \\ -100 \end{pmatrix}\right|} = \frac{5\cdot\sqrt{286}}{286} \qquad \alpha := \operatorname{acos}\left(\frac{5\cdot\sqrt{286}}{286}\right) \qquad \alpha = 72.803\cdot°$$

Tauchwinkel $\varphi := 90° - \alpha \qquad \varphi = 17.197\cdot°$

Das U-Boot taucht zu steil!