# Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

## • Mathematik 13 Technik - A I - Lösung

made with mathcad

**Teilaufgabe 1**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f = ]-2;\ 2]$.

**Teilaufgabe 1.1** (6 BE)

Bestimmen Sie das Mononotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f und die Wertemenge von f.

[ Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$ ]

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-1\cdot(2+x)-(2-x)1}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2+x}{2+x+2-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2+x}{8}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-4}{(2+x)^2} \qquad f'(x) = \frac{-\sqrt{2+x}}{2\cdot(2+x)\cdot\sqrt{2-x}}\cdot\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2+x)}{2\cdot(2+x)\cdot\sqrt{(2-x)\cdot(2+x)}} \qquad f'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x) < 0$: also ist $G_f$ streng monoton fallend in $]-2;\ 2]$.

Extrempunkt auf dem Rand: $f(2) = 0$ Tiefpunkt: **T(2/0)**

$$\lim_{x\to -2^+} \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

Wertemenge: $W = [\,0;\ \frac{\pi}{2}\,[$

**Teilaufgabe 1.2** **(8 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f sowie die Gleichung der Wendetangente w. Zeichnen Sie den Graphen von f und die Wendetangente w auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.
(1 LE = 2 cm; Platzbedarf für 1.4: $-2 \le y \le 2$)

$$f'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}} = \frac{-1}{2}\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{-1}{2}}$$

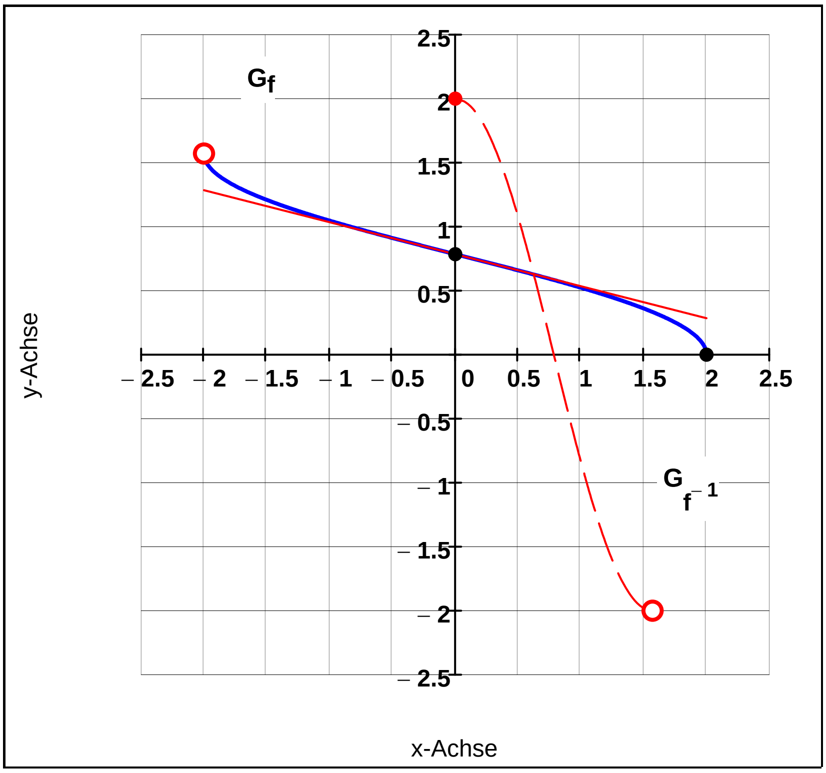
$$f''(x) = \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{-3}{2}}\cdot(-2\cdot x) = \frac{-2\cdot x}{4\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}} = \frac{-x}{2\cdot\sqrt{\left(4-x^2\right)^3}}$$

$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = 0$ Wendestelle, da Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

$f(0) = \frac{\pi}{4}$ Wendepunkt: **WP( 0 / $\frac{\pi}{4}$ )**

Steigung im Wendepunkt: $f'(0) = -\frac{1}{4}$

Wendetangente: $t(x) := \frac{-1}{4}\cdot x + \frac{\pi}{4}$




| $x_d$ = | $f(x_d)$ = |
|---|---|
| -1.5 | 1.21 |
| -1 | 1.05 |
| -0.5 | 0.91 |
| 0 | 0.79 |
| 0.5 | 0.66 |
| 1 | 0.52 |
| 1.5 | 0.36 |
| 2 | 0 |

Tangente:

$t(1) = \mathbf{0.54}$

$t(2) = \mathbf{0.3}$

$t(-2) = \mathbf{1.3}$

**Teilaufgabe 1.3 (6 BE)**
Der Graph von f und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

$$A = \int_0^2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx$$

Nebenrechnung 1: $$F(x) = \int \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx$$

Partielle Integration: $u(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ $\quad u'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$

$v'(x) = 1$ $\quad v(x) = x$

$$F(x) = x\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) + \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\, dx$$

Nebenrechnung 2:

$$\int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\, dx = \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{z}}\cdot\frac{1}{-2\cdot x}\, dz = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{-1}{\sqrt{z}}\, dz = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot z^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{z} = \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Substitution: $z = 4 - x^2$ $\quad \frac{dz}{dx} = -2\cdot x$ $\quad dx = \frac{dz}{-2\cdot x}$

Einsetzen: $$F(x) = x\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

$$A = F(2) - F(0) = 2\cdot\arctan(0) - \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4} = 1$$

**Teilaufgabe 1.4 (5 BE)**
Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}$ im Schnittpunkt dieses Graphen mit der x-Achse.
Zeichnen Sie den Graphen von $f^{-1}$.

f ist umkehrbar, da $G_f$ streng monoton fallend ist.

$f(0) = \frac{\pi}{4}$ Schnittpunkt von u mit der x-Achse: $N\left(\frac{\pi}{4} / 0\right)$

Steigung der Tangente an die Umkehrfunktion: $m_u := \frac{1}{f'(0)} = -4$

Gleichung der Tangente: $t_u(x) := -4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - 4 \cdot x$

**Teilaufgabe 2.0**
Gegeben ist die Funktion $g_a$ mit $g_a(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a - x}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge
$D_{g_a} = ]-\infty; a[ \setminus \{0\}$ und dem Parameter $a \in IR^+$.

**Teilaufgabe 2.1 (9 BE)**
Bestimmen Sie die Nullstellen von $g_a$ in Abhängigkeit von a sowie die Anzahl der Nullstellen.
Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $g_a(x)$ an den Rändern von $D_a$.

$$g_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x^2}{a - x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a - x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a - x$$

$$x^2 + x - a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $D(a) := 4 \cdot a + 1$

$D(a) > 0 \rightarrow 4 \cdot a + 1 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{4} < a$ immer zwei Nullstellen, da a>0:

$x_1(a) := -\frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2}$ $x_2(a) := \frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2}$

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{x^2}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{a-x}}\right) \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2 \cdot x}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{-1}}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \ln\left(\frac{\overset{\overset{a^2}{\uparrow}}{x^2}}{\underset{\underset{0^+}{\downarrow}}{a-x}}\right) \to \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(\frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{x^2}}{\underset{\underset{a}{\downarrow}}{a-x}}\right) \to -\infty$$

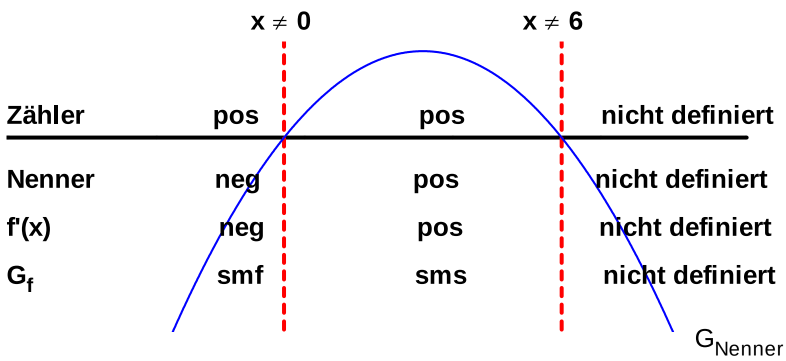
$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{a-x}\right) \to -\infty$$

**Teilaufgabe 2.2 (8 BE)**
Ermitteln Sie für a = 6 das Monotonieverhalten des Graphen von $g_6$ und zeichnen Sie den Graphen von $g_6$ im Bereich für $-6 \le x < 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (1 LE = 1 cm)

$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2}{6-x}\right)$$

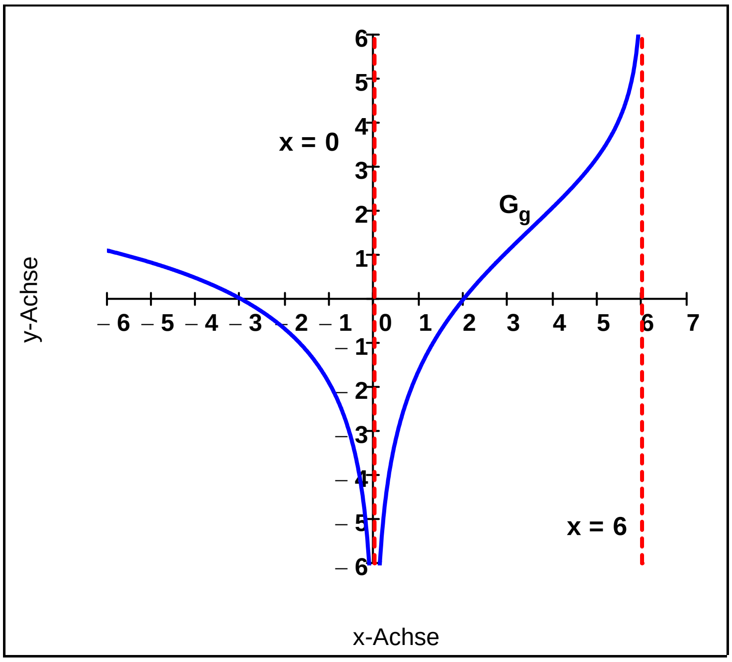
$$g'(x) = \frac{6-x}{x^2} \cdot \frac{2 \cdot x \cdot (6-x) - x^2 \cdot (-1)}{(6-x)^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{12 \cdot x - 2 \cdot x^2 + x^2}{(6-x)} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{12 \cdot x - x^2}{(6-x)} = \frac{12-x}{x \cdot (6-x)}$$

waagrechte Tangenten: $x_0 = 12$ nicht definiert




| | | $x \neq 0$ | | $x \neq 6$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Zähler** | **pos** | | **pos** | | **nicht definiert** |
| **Nenner** | **neg** | | **pos** | | **nicht definiert** |
| **f'(x)** | **neg** | | **pos** | | **nicht definiert** |
| $G_f$ | **smf** | | **sms** | | **nicht definiert** |

$G_f$ ist streng monoton fallend in $]-\infty\,;\,0[$ und $G_f$ ist streng monoton steigend in $]\,0\,;\,6\,[$.




| $x_1 =$ | $g(x_1) =$ |
|---|---|
| -6 | 1.1 |
| -5 | 0.8 |
| -4 | 0.5 |
| -3 | 0 |
| -2 | -0.7 |
| -1 | -1.9 |

| $x_2 =$ | $g(x_2) =$ |
|---|---|
| 1 | -1.6 |
| 2 | 0 |
| 3 | 1.1 |
| 4 | 2.1 |
| 5 | 3.2 |

**Teilaufgabe 2.3 (6 BE)**

Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $\mathbf{G(x) = \int_2^x g_6(t)\,dt}$ mit der Definitionsmenge $\mathbf{D_G = ]\,0\,;\,6\,[}$ .

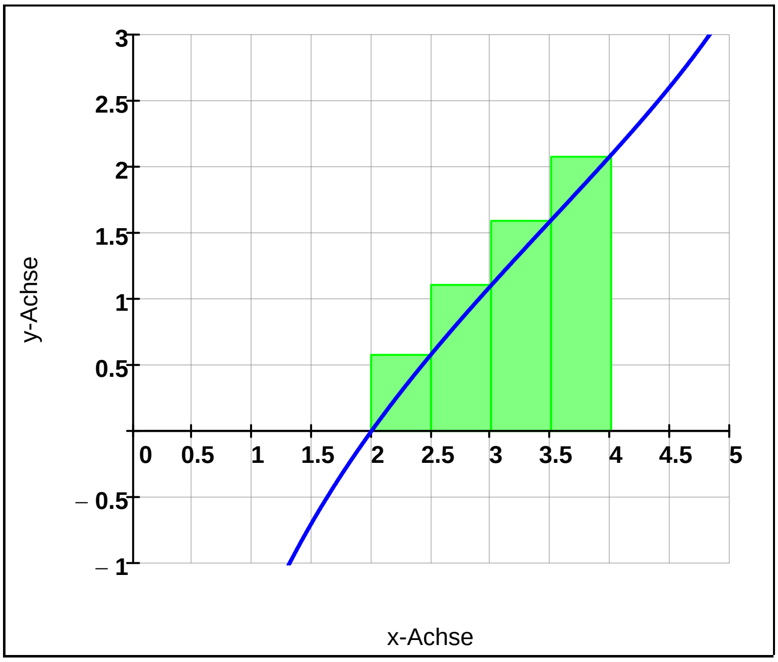
Begründen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von G. Schätzen Sie den Wert von $\mathbf{G(4)}$ durch Berechnung der Obersumme mit $\mathbf{\Delta x = 0.5}$ ab.

Vorzeichen von $\mathbf{G'(x)}$ entspricht dem Vorzeichen von $\mathbf{g(x)}$:

$G_G$ ist also streng monoton fallend in **] 0 ; 2 ]** und streng monoton steigend in **[ 2 ; 6 [** .

$$\mathbf{A = \int_2^4 \ln\left(\frac{x^2}{6-x}\right) dx = \frac{1}{2}\cdot\left(g\left(\frac{5}{2}\right) + g(3) + g\left(\frac{7}{2}\right) + g(4)\right) = \frac{1}{2}\cdot(0.58 + 1.099 + 1.589 + 2.0799)}$$

$\mathbf{A = 2.67}$



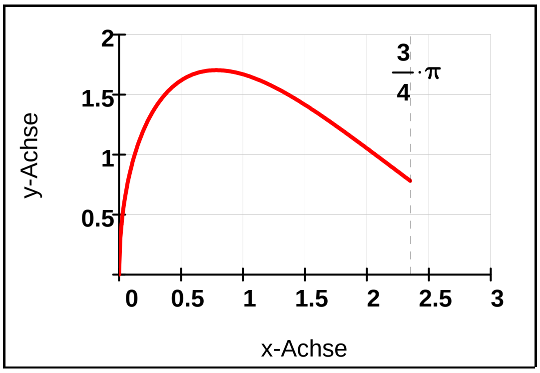

Nebenrechnung :

| $x_0 =$ | $g(x_0) =$ |
|---|---|
| 2.5 | 0.58 |
| 3 | 1.099 |
| 3.5 | 1.589 |
| 4 | 2.079 |

**Teilaufgabe 3 (6 BE)**
Durch die Rotation des Graphen der Funktion

h mit $h(x) = 3\cdot\sqrt{e^{-x}\cdot\sin(x)}$ , $D_h = \left[\,0\,;\,\frac{3}{4}\cdot\pi\,\right]$,

um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher die Form einer Blumenvase beschreibt. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.




$$V = \pi\cdot\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi}(h(x))^2\,dx = 9\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi}e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx$$

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = e^{-x}\cdot(-\cos(x)) - \int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$u(x) = e^{-x}$ $\quad$ $u'(x) = -e^{-x}$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad$ $v(x) = -\cos(x)$

$$\int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{-x}\cdot\sin(x) + \int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$u(x) = e^{-x}$ $\quad$ $u'(x) = -e^{-x}$

$v'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $v(x) = \sin(x)$

einsetzen:

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(x) - \left(e^{-x}\cdot\sin(x) + \int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx\right)$$

Auflösen nach dem Integral: $\quad 2\cdot\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(x) - e^{-x}\cdot\sin(x)$

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = \frac{-1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(\cos(x) + \sin(x))$$

$$V = \frac{-9\cdot\pi}{2}\cdot\left[e^{-\frac{3}{4}\cdot\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\right) - e^{0}\cdot(\cos(0) + \sin(0))\right]$$

$$V = \frac{-9\cdot\pi}{2}\cdot\left[e^{-\frac{3}{4}\cdot\pi}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right] = \frac{9}{2}\cdot\pi$$

**Teilaufgabe 4 (6 BE)**

Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung $\left(x^2 - 4\right) \cdot y' = 4 \cdot y^2$ mit $x > 2$ und $y > 0$.

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $y(3) = \frac{1}{\ln(5)}$

Gegebene DGL: $\left(x^2 - 4\right) \cdot y' = 4 \cdot y^2$

$y > 0$ $\quad \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{4}{x^2 - 4}$

Trennen der Variablen: $\displaystyle\int \frac{1}{y^2} \, dy = \int \frac{-4}{4 - x^2} \, dx$

Merkhilfe: $\frac{-1}{y} = -4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\left|\frac{2 + x}{2 - x}\right|\right) + k$

ohne Betrag, da x >2,
neg. VZ im Argument $\quad \frac{1}{y} = \ln\left(\frac{2 + x}{x - 2}\right) + k$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{2 + x}{x - 2}\right) + k}$

Anfangsbedingung: $y_A(3) = \frac{1}{\ln(5)}$

$y_A(3) = \frac{1}{\ln(5) + k} \overset{!}{=} \frac{1}{\ln(5)}$ $\qquad \ln(5) + k = \ln(5)$ auflösen, $k \rightarrow 0$

Spezielle Lösung: $y_S(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\frac{2 + x}{x - 2}\right)}$