Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ mit der Definitionsmenge $D_f =]-2;\, 2]$.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)

Bestimmen Sie jeweils **ohne CAS** das Mononotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts des Graphen von f und die Wertemenge von f.

[Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$]

$$f'(x) = \frac{1}{1+\frac{2-x}{2+x}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-1\cdot(2+x)-(2-x)1}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2+x}{2+x+2-x}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2+x}{8}\cdot\sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\cdot\frac{-4}{(2+x)^2} \qquad f'(x) = \frac{-\sqrt{2+x}}{2\cdot(2+x)\cdot\sqrt{2-x}}\cdot\frac{\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}}$$

$$f'(x) = \frac{-(2+x)}{2\cdot(2+x)\cdot\sqrt{(2-x)\cdot(2+x)}} \qquad f'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$$

$f'(x) < 0$: also ist G_f streng monoton fallend in $]-2;\, 2]$.

Extrempunkt auf dem Rand: $f(2) = f(2)$ Tiefpunkt: **T(2/0)**

$$\lim_{x\to -2^+} \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\downarrow$$

$$\infty$$

:Wertemenge $W = [\,0\,;\, \frac{\pi}{2}\,[$

Teilaufgabe 1.2 **(8 BE)**
Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von f sowie die Gleichung der Wendetangente w. Zeichnen Sie den Graphen von f und die Wendetangente w auch unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem.
(1 LE = 2 cm; Platzbedarf für 1.4: $-2 \le y \le 2$)

$f(x) := \operatorname{atan}\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ $\qquad f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) = -\frac{x\cdot\sqrt{-\frac{x-2}{x+2}}}{2\cdot(x-2)^2\cdot(x+2)}$

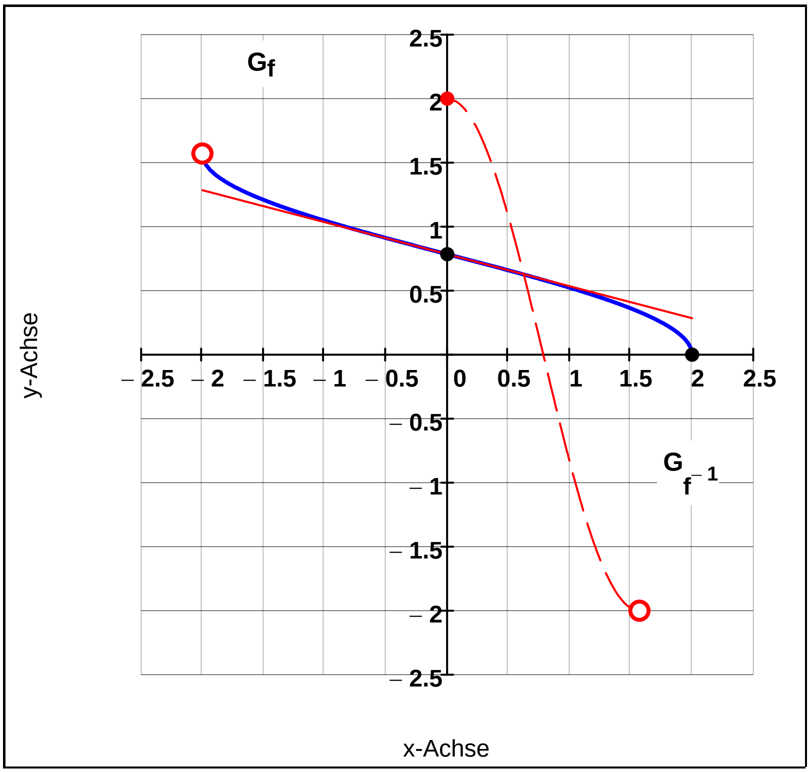
$f''(x) = 0$ auflösen, $x \rightarrow 0$

$\Leftrightarrow \qquad x_W = 0$ Wendestelle, da Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

$f(0) = \frac{\pi}{4}$ Wendepunkt: **WP(0 / $\frac{\pi}{4}$)**

Steigung im Wendepunkt: $f'(0) = -\frac{1}{4}$

Wendetangente: $t(x) := \frac{-1}{4}\cdot x + \frac{\pi}{4}$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-1.5	1.21
-1	1.05
-0.5	0.91
0	0.79
0.5	0.66
1	0.52
1.5	0.36
2	0

Tangente:

$t(1) = 0.5$

$t(-2) = 1.3$

$t(1.5) = 0.4$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Der Graph von f und die Koordinatenachsen schließen im I. Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche.

$$A = \int_0^2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx$$

Nebenrechnung 1: $F(x) = \int \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) dx$

Partielle Integration: $u(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right)$ $\quad u'(x) = \frac{-1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}$

$v'(x) = 1$ $\quad v(x) = x$

$$F(x) = x\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) + \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}} dx$$

Nebenrechnung 2:

$$\int \frac{x}{2\cdot\sqrt{4-x^2}} dx = \int \frac{x}{2\cdot\sqrt{z}}\cdot\frac{1}{-2\cdot x} dz = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{-1}{\sqrt{z}} dz = \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot z^{\frac{1}{2}} = \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{z} = \frac{-1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Substitution: $z = 4 - x^2$ $\quad \frac{dz}{dx} = -2\cdot x$ $\quad dx = \frac{dz}{-2\cdot x}$

Einsetzen: $F(x) = x\cdot\arctan\left(\sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4-x^2}$

$$A = F(2) - F(0) = 2\cdot\arctan(0) - \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 + \frac{1}{2}\cdot\sqrt{4} = 1$$

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Begründen Sie, dass f umkehrbar ist, und ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Umkehrfunktion f^{-1} im Schnittpunkt dieses Graphen mit der x-Achse.
Zeichnen Sie den Graphen von f^{-1} in das Koordinatensystem von 1.2

f ist umkehrbar, da G_f in D_f streng monoton fallend ist.

$f(0) = \frac{\pi}{4}$ Schnittpunkt von u mit der x-Achse: $N\left(\frac{\pi}{4} / 0\right)$

Steigung der Tangente an die Umkehrfunktion: $m_u := \frac{1}{f'(0)} = -4$

Gleichung der Tangente: $t_u(x) := -4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pi - 4 \cdot x$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die Funktion g_a mit $g_a(x) = \ln\left(\frac{x^2}{a - x}\right)$ mit der maximalen Definitionsmenge

$D_{g_a} =]-\infty ; a[\setminus \{0\}$ und dem Parameter $a \in \mathbb{R}^+$.

Teilaufgabe 2.1 (9 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** die Nullstellen von g_a in Abhängigkeit von a sowie die Anzahl der Nullstellen. Ermitteln Sie ebenfalls **ohne CAS** das Verhalten der Funktionswerte $g_a(x)$ an den Rändern von D_a.

$$g_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{x^2}{a-x}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{a-x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = a - x$$

$$x^2 + x - a = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $D(a) := 4 \cdot a + 1$

$D(a) > 0 \rightarrow 4 \cdot a + 1 > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{4} < a$ immer zwei Nullstellen, da a>0:

$$x_1(a) := -\frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2} \qquad\qquad x_2(a) := \frac{\sqrt{4 \cdot a + 1}}{2} - \frac{1}{2}$$

L'Hosp.

$$\lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{\overset{\infty}{\overset{\uparrow}{x^2}}}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{a - x}}}\right) = \lim_{x \to -\infty} \ln\left(\frac{2 \cdot x}{\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{-1}}}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} \ln\left(\frac{\overset{a^2}{\overset{\uparrow}{x^2}}}{\underset{0^+}{\underset{\downarrow}{a - x}}}\right) \to \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \ln\left(\frac{\overset{0}{\overset{\uparrow}{x^2}}}{\underset{a}{\underset{\downarrow}{a - x}}}\right) \to -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{x^2}{a - x}\right) \to -\infty$$

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Ermitteln Sie für a = 6 das Monotonieverhalten des Graphen von g_6 und zeichnen Sie den Graphen von g_6 für $-6 \le x < 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem (1 LE = 1 cm).

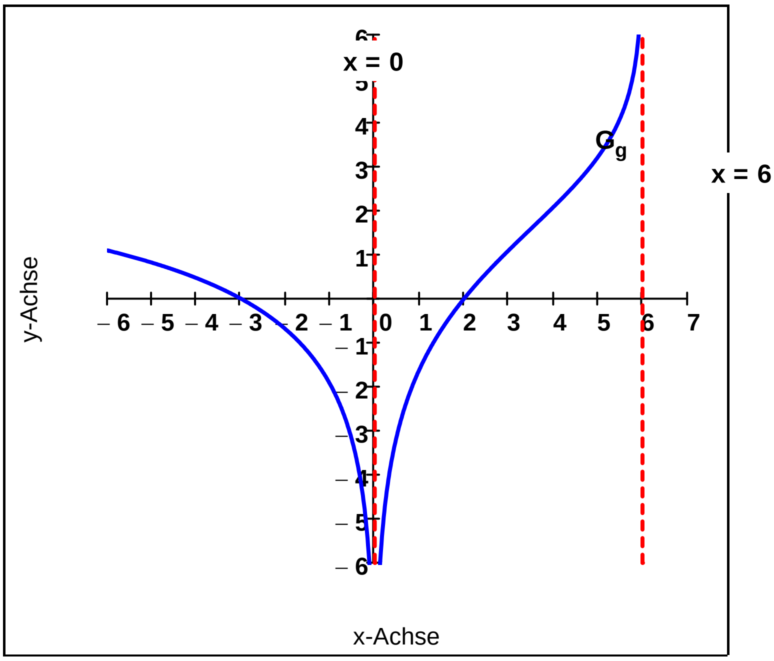
$$g(x) := \ln\left(\frac{x^2}{6-x}\right)$$

$$g'(x) := \frac{d}{dx}g(x) \rightarrow -\frac{\left[\frac{x^2}{(x-6)^2} - \frac{2\cdot x}{x-6}\right]\cdot(x-6)}{x^2} \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{2}{x} - \frac{1}{x-6} \text{ Faktor } \rightarrow \frac{x-12}{x\cdot(x-6)}$$

$$g'(x) > 0 \ \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x < 6\end{array}\right. \rightarrow 0 < x < 6$$

$$g'(x) < 0 \ \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x < 6\end{array}\right. \rightarrow x < 0$$

G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty;\ 0[$ und G_f ist streng monoton steigend in $]\ 0;\ 6[$.



x_1 =	$g(x_1)$ =
-6	1.1
-5	0.8
-4	0.5
-3	0
-2	-0.7
-1	-1.9

x_2 =	$g(x_2)$ =
1	-1.6
2	0
3	1.1
4	2.1
5	3.2

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Gegeben ist weiter die Integralfunktion G durch $\mathbf{G(x)} = \int_2^x \mathbf{g_6(t)\,dt}$ mit der Definitionsmenge

$D_G =]\,0\,;\,6\,[$.

Begründen Sie ohne weitere Rechnung das Monotonieverhalten des Graphen von G **und die Art und die Koordinaten des Extrempunkts.**

Schätzen Sie den Wert von $\mathbf{G(4)}$ durch Berechnung der Obersumme mit $\Delta x = 0.5$ ab.

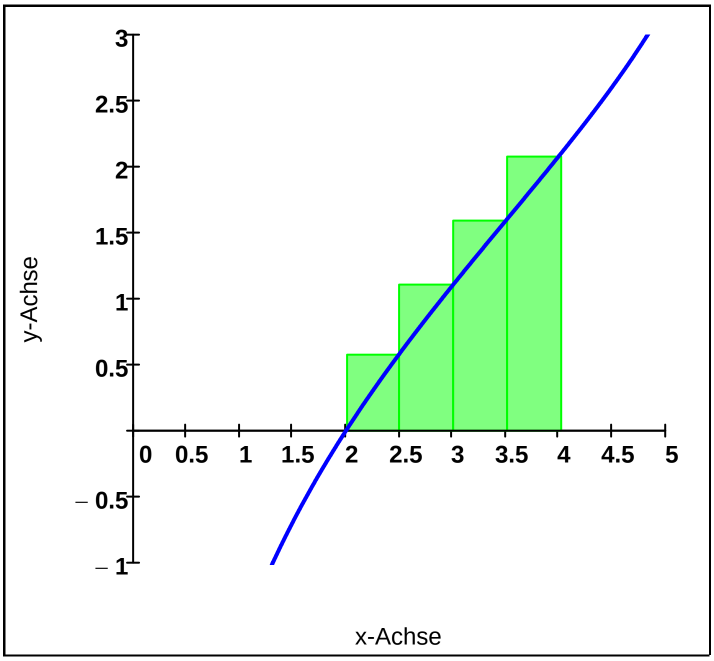
Vorzeichen von $\mathbf{G'(x)}$ entspricht dem Vorzeichen von $\mathbf{g(x)}$:

G_G ist also streng monoton fallend in $]\,0\,;\,2\,]$ und streng monoton steigend in $[\,2\,;\,6\,[$.

Der Extrempunkt ist ein Tiefpunkt: **(2/0)**

$$A = \int_2^4 \ln\left(\frac{x^2}{6-x}\right) dx \qquad\qquad A := \frac{1}{2}\cdot\left(g\left(\frac{5}{2}\right) + g(3) + g\left(\frac{7}{2}\right) + g(4)\right)$$

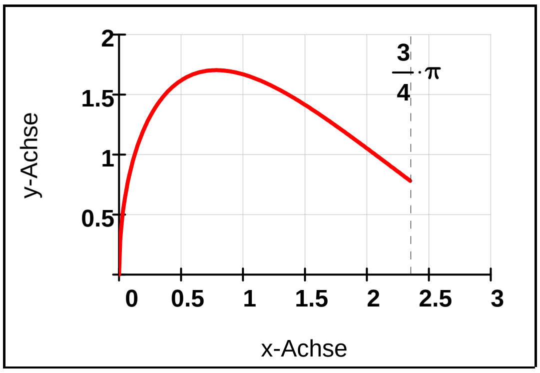
A = 2.67



Teilaufgabe 3 (6 BE)
Durch die Rotation des Graphen der Funktion

h mit $h(x) = 3\cdot\sqrt{e^{-x}\cdot\sin(x)}$, $D_h = [\,0\,;\,\frac{3}{4}\cdot\pi\,]$,

um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper, welcher die Form einer Blumenvase beschreibt. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Volumeninhalts.



$$V = \pi\cdot\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi} (h(x))^2\,dx = 9\cdot\pi\cdot\int_0^{\frac{3}{4}\cdot\pi} e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx$$

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = e^{-x}\cdot(-\cos(x)) - \int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$u(x) = e^{-x}$ $\quad$ $u'(x) = -e^{-x}$

$v'(x) = \sin(x)$ $\quad$ $v(x) = -\cos(x)$

$$\int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx = e^{-x}\cdot\sin(x) + \int e^{-x}\cdot\cos(x)\,dx$$

$u(x) = e^{-x}$ $\quad$ $u'(x) = -e^{-x}$

$v'(x) = \cos(x)$ $\quad$ $v(x) = \sin(x)$

einsetzen:

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(x) - \left(e^{-x}\cdot\sin(x) + \int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx\right)$$

Auflösen nach dem Integral: $\quad 2\cdot\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = -e^{-x}\cdot\cos(x) - e^{-x}\cdot\sin(x)$

$$\int e^{-x}\cdot\sin(x)\,dx = \frac{-1}{2}\cdot e^{-x}\cdot(\cos(x) + \sin(x))$$

$$V = \frac{-9\cdot\pi}{2}\cdot\left[e^{-\frac{3}{4}\cdot\pi}\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{4}\cdot\pi\right)\right) - e^{0}\cdot(\cos(0) + \sin(0))\right]$$

$$V = \frac{-9\cdot\pi}{2}\cdot\left[e^{-\frac{3}{4}\cdot\pi}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 1\right] = \frac{9}{2}\cdot\pi$$

Teilaufgabe 4 (6 BE)

Gegeben ist die separierbare Differenzialgleichung $\left(x^2 - 4\right) \cdot y' = 4 \cdot y^2$ mit $x > 2$ und für $y > 0$.

Bestimmen Sie **ohne CAS** die Lösung der Differenzialgleichung mit $y(3) = \dfrac{1}{\ln(5)}$.

Gegebene DGL: $\left(x^2 - 4\right) \cdot y' = 4 \cdot y^2$

$y \neq 0$ $\quad \dfrac{dy}{dx} \cdot \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{4}{x^2 - 4}$

Trennen der Variablen: $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\, dy = \int \frac{-4}{4 - x^2}\, dx$

Merkhilfe: $\dfrac{-1}{y} = -4 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \ln\left(\left|\dfrac{2 + x}{2 - x}\right|\right) + k$

ohne Betrag, da x >2,
neg. VZ im Argument $\quad \dfrac{1}{y} = \ln\left(\dfrac{2 + x}{x - 2}\right) + k$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{2 + x}{x - 2}\right) + k}$

Anfangsbedingung: $y_A(3) = \dfrac{1}{\ln(5)}$

$y_A(3) = \dfrac{1}{\ln(5) + k} \stackrel{!}{=} \dfrac{1}{\ln(5)}$ $\qquad \ln(5) + k = \ln(5)$ auflösen , $k \rightarrow 0$

Spezielle Lösung: $y_S(x) = \dfrac{1}{\ln\left(\dfrac{2 + x}{x - 2}\right)}$