Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Technik - A II - Lösung mit CAS**

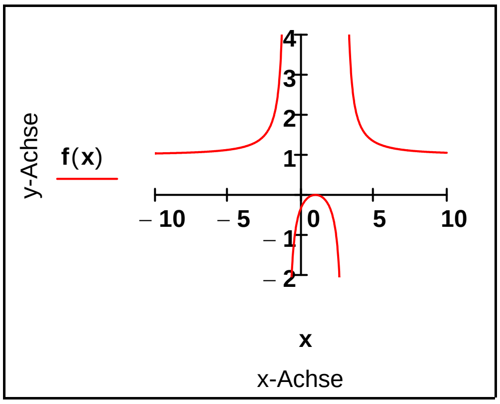
Teilaufgabe 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)}$ mit der Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\,;\,3\}$.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)

Geben Sie die Nullstelle von f an und zeigen Sie, dass der Graph von f symmetrisch ist.

$$f(x) := \frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)}$$



Nullstelle: $x_0 = 1$ zweifach

Symmetrie muss also bzgl. der senkrechten Geraden durch die Nullstelle untersucht werden.

Koordinatentransformation: $x = u + 1$ $y = v$

Neuer Funktionsterm:

$$f\_(u) := f(u+1) = \frac{u^2}{(u-2)\cdot(u+2)} \qquad f\_(-u) = \frac{u^2}{(u-2)\cdot(u+2)}$$

$f\_(-u) - f\_(u) \rightarrow 0$ $\Rightarrow$ Achsensymmetrie

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f.

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \rightarrow -\infty$ $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \rightarrow \infty$

senkrechte Asymptote

$x = 3$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) \rightarrow -\infty$ $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \rightarrow \infty$

senkrechte Asymptote

$x = 1$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)} \rightarrow 1$ $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)} \rightarrow 1$

waagrechte Asymptote

$y = 1$

Teilaufgabe 1.3 **(5 BE)**

Ermitteln Sie **ohne CAS** das Monotonieverhalten des Graphen von f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{-8\cdot(x-1)}{[(x+1)\cdot(x-3)]^2}$]

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{(x-1)^2}{x^2-2\cdot x-3}$$

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2-2\cdot x-3\right)-(x-1)^2\cdot(2\cdot x-2)}{(x+1)^2\cdot(x-3)^2} = \frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2-2\cdot x-3-x^2+2\cdot x-1\right)}{(x+1)^2\cdot(x-3)^2}$$

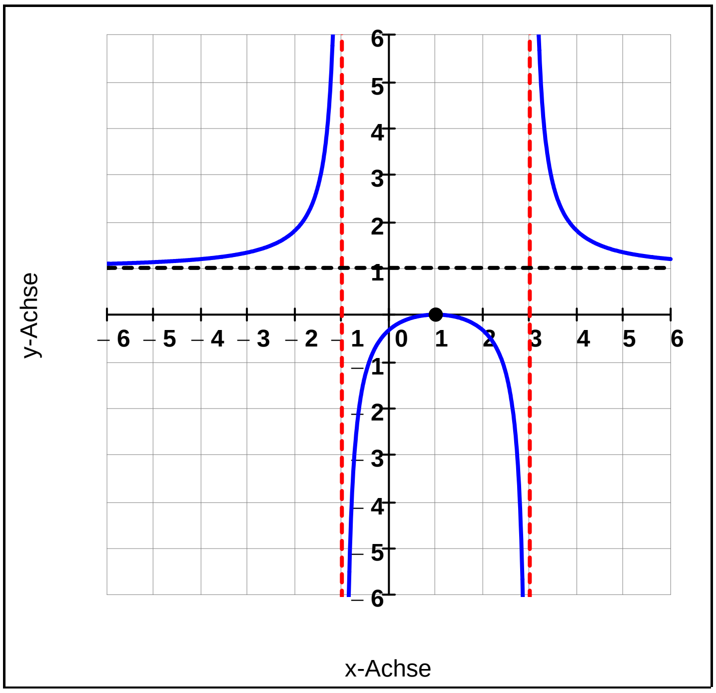
$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-1)\cdot(-4)}{(x+1)^2\cdot(x-3)^2} = \frac{-8\cdot(x-1)}{(x+1)^2\cdot(x-3)^2}$$

		$x \neq -1$		$x = 1$		$x \neq 3$	
Zähler	pos		pos		neg		neg
Nenner	pos		pos		pos		pos
f '(x)	pos		pos		neg		neg
G_f	sms		sms		smf		smf
				HP			

G_f ist streng monoton steigend in $x \in]-\infty\,;\,-1[$ und in $x \in]-1\,;\,1]$.

G_f ist streng monoton fallend in $x \in [\,1\,;\,3\,[$ und in $x \in]\,3\,;\,\infty\,]$.

Teilaufgabe 1.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen von f für $-6 \le x \le 6$ unter Verwendung aller bisheriger Ergebnisse.
Tragen Sie auch alle Asymptoten ein. (1 LE = 1 cm).



$x_1 := -6..-2$ $\qquad$ $x_2 := -0.5, 0..2.5$ $\qquad$ $x_3 := 3.5, 4..6$

$x_1 =$	$f(x_1) =$
-6	1.09
-5	1.13
-4	1.19
-3	1.33
-2	1.8

$x_2 =$	$f(x_2) =$
-0.5	-1.3
0	-0.3
0.5	-0.1
1	0
1.5	-0.1
2	-0.3
2.5	-1.3

$x_3 =$	$f(x_3) =$
3.5	2.8
4	1.8
4.5	1.5
5	1.3
5.5	1.2
6	1.2

Teilaufgabe 1.5 (6 BE)
Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen x = 4 und x = 6 eine Fläche ein. Ermitteln Sie **ohne CAS** die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Fläche. Runden Sie das Ergebnis auf drei Nachkommastellen.

$$A = \int_4^6 \frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)}\,dx$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x^2 - 2\cdot x - 3}$$

$$\left(x^2 - 2\cdot x + 1\right) \div \left(x^2 - 2\cdot x - 3\right) = 1 + \frac{4}{(x+1)\cdot(x-3)}$$

$$-\left(x^2 - 2\cdot x - 3\right)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad 4}$$

$$\frac{4}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x+1)}{(x+1)\cdot(x-3)} = \frac{(A+B)\cdot x + (B - 3\cdot A)}{(x+1)\cdot(x-3)}$$

Koeffizientenvergleich:

(1) $A + B = 0$ Aus (1) $A = -B$

(2) $B - 3\cdot A = 4$ In (2) $4\cdot B = 4 \quad \Rightarrow \quad B = 1$ in (1) $A = -1$

$$F(x) = \int \frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)}\,dx = \int \left(1 + \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right) dx = x + \ln(|x-3|) - \ln(|x+1|)$$

$$A = F(6) - F(4) = 6 + \ln(3) - \ln(7) - 4 - \ln(1) + \ln(5) = 2 + \ln\left(\frac{15}{7}\right) = 2.762$$

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)
Begründen Sie, dass die Funktion g mit $\mathbf{g(x) = f(x)}$ und $\mathbf{D_g =]\,3\,;\,\infty\,[}$ umkehrbar ist. Bestimmen Sie **ohne CAS** den Term der Umkehrfunktion $\mathbf{g^{-1}}$, deren Definitionsmenge sowie die Steigung des Graphen von $\mathbf{g^{-1}}$ an der Stelle $\mathbf{x = \frac{4}{3}}$.

G_f ist streng monoton fallend für x > 3, also auch G_g, deshalb umkehrbar.

$$y = \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x^2 - 2\cdot x - 3} \qquad x = \frac{y^2 - 2\cdot y + 1}{y^2 - 2\cdot y - 3} \qquad D_g =]\,3\,;\,\infty\,[\qquad W_g =]\,1\,;\,\infty\,[$$

$$x\cdot y^2 - 2\cdot x\cdot y - 3\cdot x = y^2 - 2\cdot y + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)\cdot y^2 + (2 - 2\cdot x)\cdot y - 3\cdot x - 1 = 0$$

$$(x-1)\cdot y^2 + (2 - 2\cdot x)\cdot y - 3\cdot x - 1 = 0 \;\Bigg|\; \begin{matrix}\text{auflösen}, y\\ \text{vereinfachen}\end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{2\cdot\sqrt{x^2 - x}}{x-1} + 1 \\ 1 - \dfrac{2\cdot\sqrt{x^2 - x}}{x-1} \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 1 - \frac{2\cdot\sqrt{x^2 - x}}{x-1} = 1 - 2\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}} \qquad W_{g-1} =]\,3\,;\,\infty\,[\qquad D_{g^{-1}} =]\,1\,;\,\infty\,[$$

$$y_2 = 1 + \frac{2\cdot\sqrt{x^2 - x}}{x-1} = 1 + 2\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}} \qquad \text{Lösung} \qquad g^{-1}(x) = 1 + 2\cdot\sqrt{\frac{x}{x-1}}$$

$$g(x) = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 2\cdot x + 1}{x^2 - 2\cdot x - 3} = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2\cdot x + 1 = \frac{4}{3}\cdot x^2 - \frac{8}{3}\cdot x - 4$$

$$x^2 - 2\cdot x + 1 = \frac{4}{3}\cdot x^2 - \frac{8}{3}\cdot x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\cdot x^2 - \frac{2}{3}\cdot x - 5 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{Lösung}$$

Steigung der Umkehrfunktion:

$$m_{g^{-1}} = \frac{1}{g'(5)} = \frac{(5+1)^2\cdot(5-3)^2}{-8\cdot(5-1)} = \frac{-9}{2}$$

Teilaufgabe 2
Gegeben ist weiter die Funktion k mit $k(x) = \arctan(f(x))$ mit der Funktion f aus Aufgabe 1 und $D_k = D_f$.

$$k(x) := \operatorname{atan}(f(x)) = \operatorname{atan}\left[\frac{(x-1)^2}{(x+1)\cdot(x-3)}\right]$$

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte $k(x)$ an den Rändern von D_k sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von k.

$$\lim_{x \to -\infty} k(x) \to \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} k(x) \to \frac{\pi}{4}$$

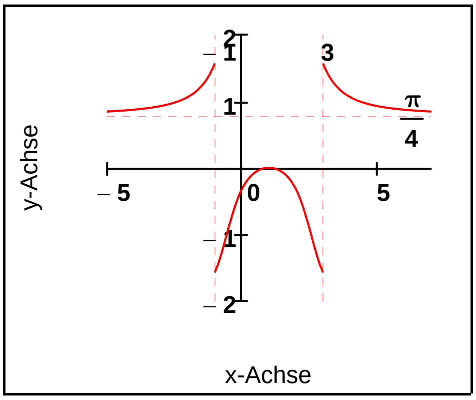
Waagrechte Asymptote: $y = \frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x \to -1^-} k(x) \to \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -1^+} k(x) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 3^-} k(x) \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to 3^+} k(x) \to \frac{\pi}{2}$$



Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** für den Graphen von k das Monotonieverhalten sowie die Art und die Koordinaten des Extrempunkts.

$$k'(x) = \frac{1}{1+(f(x))^2}\cdot f'(x)$$

$k'(x)$ und $f'(x)$ haben dasselbe Vorzeichen

G_k ist streng monoton steigend in $x \in \,]-\infty\,;\,-1[$ und in $x \in \,]-1\,;\,1]$.

G_k ist streng monoton fallend in $x \in [\,1\,;\,3\,[$ und in $x \in \,]\,3\,;\,\infty\,]$.

Hochpunkt: **HP(1/0)**

Teilaufgabe 3

Gegeben ist nun die Funktion h mit $\mathbf{h(x) := 5 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x}}$ mit $\mathbf{D_h =]-\infty ; 0]}$.

Teilaufgabe 3.1 **(7 BE)**

Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen von h. Zeichnen Sie den Graphen von h für $-3 \le x \le 0$ (1 LE = 2 cm).

$$h'(x) := \frac{d}{dx}h(x) \rightarrow 5 \cdot e^{2 \cdot x} + 10 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} \text{ Faktor } \rightarrow 5 \cdot e^{2 \cdot x} \cdot (2 \cdot x + 1)$$

$$h'(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -\frac{1}{2}$$

$$h'(x) < 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

G_h ist streng monoton fallend in $x \in \left] -\infty \; ; \frac{-1}{2} \right]$

$$h'(x) > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -\frac{1}{2} < x$$

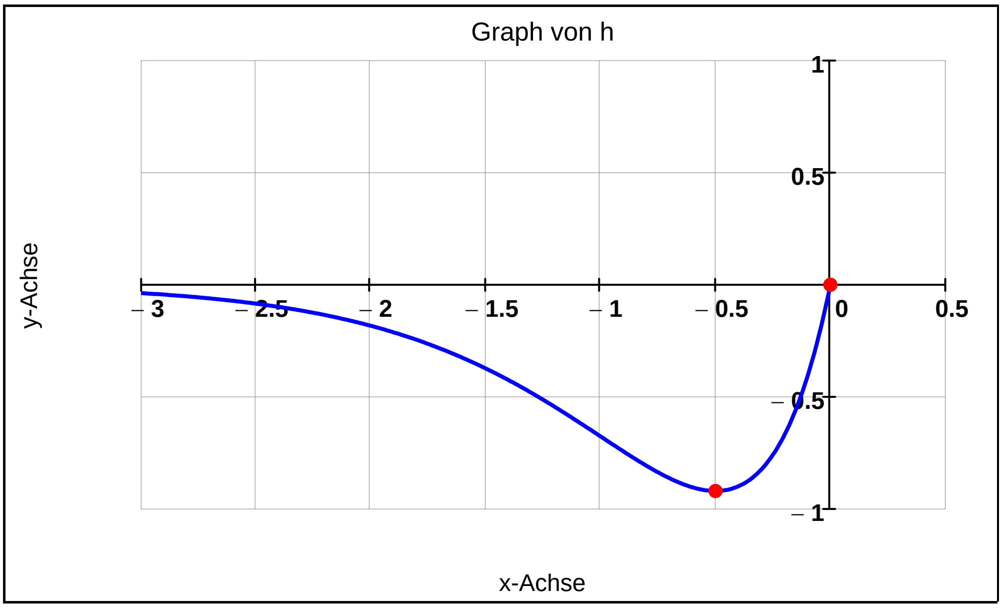
G_h ist streng monoton fallend in $x \in \left[\frac{-1}{2} \; ; \infty \right[$

$$h\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{5 \cdot e^{-1}}{2} = -0.92$$

rel. Tiefpunkt: $\mathbf{TP\left(\frac{-1}{2} \,/\, -\frac{5 \cdot e^{-1}}{2} \right)}$

$$h(0) = 0$$

Randhochpunkt: **HP(0 / 0)**



$x_d := -3, -2.5 .. 0$

$x_d =$

-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0

$h(x_d) =$

-0.04
-0.08
-0.18
-0.37
-0.68
-0.92
0

Teilaufgabe 3.2 (7 BE)
Bei der Rotation des Graphen von h um die x-Achse entsteht ein unendlich ausgedehnter Drehkörper. Berechnen Sie **ohne CAS** die Maßzahl seines Volumens.

$$V = \lim_{b \to -\infty} \left[\pi \cdot \int_b^0 (h(x))^2\,dx\right] = \lim_{b \to -\infty} \left(25 \cdot \pi \cdot \int_b^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x}\,dx\right)$$

$$V = 25 \cdot \pi \cdot \lim_{b \to -\infty} \left(\int_b^0 x^2 \cdot e^{4 \cdot x}\,dx\right)$$

Berechnung der Stammfunktion

$$H(x) = \int x^2 \cdot e^{4 \cdot x}\,dx = x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} - \int \frac{1}{2} \cdot x \cdot e^{4 \cdot x}\,dx$$

$u(x) = x^2$ $\quad u'(x) = 2 \cdot x$ $\quad u(x) = \frac{1}{2} \cdot x$ $\quad u'(x) = \frac{1}{2}$

$v'(x) = e^{4 \cdot x}$ $\quad v(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x}$ $\quad v'(x) = e^{4 \cdot x}$ $\quad v(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x}$

$$= x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot e^{4 \cdot x} + \int \frac{1}{8} \cdot e^{4 \cdot x}\,dx = x^2 \cdot \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} - \frac{1}{8} \cdot x \cdot e^{4 \cdot x} + \frac{1}{32} \cdot e^{4 \cdot x}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{8}\right)$$

$$H(0) - H(b) = \frac{1}{4} \cdot e^0 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot b} \cdot \left(b^2 - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{32} - \frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot b} \cdot \left(b^2 - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{8}\right)$$

$$\lim_{b \to -\infty} \left[\frac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot b} \cdot \left(b^2 - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{8}\right)\right] = \lim_{b \to -\infty} \left(\frac{\overset{\overset{\infty}{\uparrow}}{b^2 - \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{8}}}{\underset{\underset{\infty}{\downarrow}}{e^{-4 \cdot b}}}\right)$$

L'Hosp. $\quad -\infty \uparrow$ $\quad$ L'Hosp.

$$= \lim_{b \to -\infty} \left[\frac{2 \cdot b - \frac{1}{2}}{e^{-4 \cdot b} \cdot (-4)} \right] = \lim_{b \to -\infty} \left[\frac{2}{e^{-4 \cdot b} \cdot (16)} \right] = 0$$

$\downarrow -\infty$

$$V = 25 \cdot \pi \cdot \frac{1}{32} = \frac{25}{32} \cdot \pi = 0.781$$

$k := k$

Teilaufgabe 4 (7 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + y \cdot \cos(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

Inhomogene DGL: $\quad y' + y \cdot \cos(x) = 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x)$

Homogene DGL: $\quad y' + y \cdot \cos(x) = 0$

Triviale Lösung: $\quad y = 0$

Differentialquotient: $\quad \frac{dy}{dx} = -(\cos(x) \cdot y)$

Trennen der Variablen: $\quad \frac{dy}{y} = -\cos(x) \cdot dx$

Integration: $\quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int -\cos(x)\, dx + k \rightarrow \ln(|y|) = k - \sin(x)$

Delogarithmieren: $\quad |y| = e^{k - \sin(x)} = e^{k} \cdot e^{-\sin(x)}$

1. Fall: $\quad y = e^{-\sin(x)} \cdot K_1 \quad$ mit $K_1 = e^{k} > 0$

2. Fall: $\quad y = e^{-\sin(x)} \cdot K_2 \quad$ mit $K_2 = -e^{k} < 0$

mit trivialer Lösung: $\quad y_h(x) = K \cdot e^{-\sin(x)} \quad$ mit $K \in IR$

Variation der Konstanten: $y_p(x) = K(x) \cdot e^{-\sin(x)}$

Ableitungsfunktion: $y'_p(x) = K'(x) \cdot e^{-\sin(x)} + K(x) \cdot e^{-\sin(x)} \cdot (-\cos(x))$

Einsetzen in DGL: $y' + y \cdot \cos(x) = 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x)$

$$K'(x) \cdot e^{-\sin(x)} + K(x) \cdot e^{-\sin(x)} \cdot (-\cos(x)) + K(x) \cdot e^{-\sin(x)} \cdot \cos(x) = 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x)$$

Vereinfachen: $K'(x) \cdot e^{-\sin(x)} = 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x)$

$$K'(x) = 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot e^{\sin(x)}$$

$$K(x) = \int 0.5 \cdot \sin(2 \cdot x) \cdot e^{\sin(x)} \, dx = \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$$

Partielle Int.: $u(x) = \sin(x)$ $\quad u'(x) = \cos(x)$

$v'(x) = \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$ $\quad v(x) = e^{\sin(x)}$

$$K(x) = \sin(x) \cdot e^{\sin(x)} - \int \cos(x) \cdot e^{\sin(x)} \, dx = \sin(x) \cdot e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}$$

Spezielle Lösung: $y_p(x) = \left(\sin(x) \cdot e^{\sin(x)} - e^{\sin(x)}\right) \cdot e^{-\sin(x)} = \sin(x) - 1$

Allgemeine Lösung: $y_A(x) = \sin(x) - 1 + K \cdot e^{-\sin(x)}$