Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Technik - B I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0
Einem Eishockey-Trainer stehen insgesamt 15 Spieler zur Verfügung, wobei es sich um zwölf Feldspieler und drei Torhüter handelt.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)
Vor Spielbeginn laufen alle 15 Spieler hintereinander in die Arena ein. Ermitteln Sie, wie viele verschieden Reihenfolgen es dafür gibt, wenn der Spielführer als Letzter das Eis betritt.

14 Spieler, 1 Spielführer: $14! \cdot 1 = 87178291200$

Teilaufgabe 1.2 (2 BE)
Bestimmen Sie, wieviele Möglichkeiten der Trainer für die Anfangsaufstellung hat, wenn zu Beginn vier Feldspieler und ein Torhüter auf dem Eis stehen.

vier aus 12 Feldspielern, einer aus drei Torhütern: $\binom{12}{4} \cdot \binom{3}{1} = 495 \cdot 3 = 1485$

Nebenrechnungen:

$\text{combin}(12, 4) = 495$ $\qquad$ $\text{combin}(3, 1) = 3$

Teilaufgabe 2.0
Erfahrungsgemäß wehrt der Stammtorhüter 95% aller *Torschüsse* ab. Ein nicht abgewehrter *Torschuss* führt immer zu einem Tor.

Teilaufgabe 2.1 (6 BE)
In einem Spiel werden auf das Tor dieser Mannschaft 50 Torschüsse abgegeben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Stammtorhüter
a) genau 47 der Torschüsse abwehrt.
b) mindestens einen Torschuss, aber höchstens vier Torschüsse nicht abwehren kann.
c) die ersten 20 und insgesamt 47 Torschüsse abwehrt.

$P_A = P(X = 47)$ $\qquad$ $P_A := \text{dbinom}(47, 50, 0.95) = 0.21987$

$P(B) = P(1 \le X \le 4)$ $\qquad$ $P_B := \sum_{k=1}^{4} \text{dbinom}(k, 50, 0.05) = 0.81944$

$P(C) = 0.95^{20} \cdot P(X = 27)$ $\qquad$ $P_C := 0.95^{20} \cdot \text{dbinom}(27, 30, 0.95) = 0.04555$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Bestimmen Sie, wie viele Torschüsse die gegnerische Mannschaft auf den Stammtorhüter mindestens abgeben muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98% mindestens ein Tor zu erzielen.

X: Anzahl der Tore bei n Torschüssen

Tor wird nicht abgewehrt: $p := 0.05$

$$P(X \geq 1) \geq 0.98 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) \geq 0.98 \quad \Leftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0.02$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0.05^0 \cdot 0.95^n \leq 0.02$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.95^n \leq 0.02 \quad \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, n \\ \text{Gleitkommazahl}, 6 \end{array} \right. \rightarrow 76.2677 \leq n < \infty$$

Es müssen mindestens 77 Torschüsse abgegeben weden.

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Zur neuen Saison kaufen sich alle Spieler neue Schlittschuhe, wobei 20% der Spieler den sehr teuren Schlittschuh *Spirit* wählen. 90 % der Spieler, die *Spirit* tragen, bekommen keine Blasen an den Füßen. Insgesamt erhalten 28% der Spieler Blasen an den Füßen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Spieler, der keine Blasen hat, nicht *Spirit* trägt.

S: Spieler trägt Spirit $\quad P(S) = 0.20$

B: Spieler bekommt Blasen $\quad P(B) = 0.28$

$$P_S(\overline{B}) = 0.90$$

$$P_S(\overline{B}) = \frac{P(S \cap \overline{B})}{P(S)} \quad \Rightarrow \quad P(S \cap \overline{B}) = P(S) \cdot P_S(\overline{B}) = 0.20 \cdot 0.90 = 0.18$$

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & S & \overline{S} & \blacksquare \\ B & 0.02 & 0.26 & 0.28 \\ \overline{B} & 0.18 & 0.54 & 0.72 \\ \blacksquare & 0.20 & 0.80 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_{\overline{B}}(\overline{S}) = \frac{P(\overline{S} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{0.54}{0.72} = 0.75$$

Teilaufgabe 4 (8 BE)
Die Mannschaft benutzt den Schlägertyp *Battle*. Aus Erfahrungweiß man, dass 12% dieses Schlägertyps eine zu geringe Qualtität aufweisen. Berechnen Sie **ohne CAS**, wie viele Schläger der Verein mindestens bestellen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens 150 Schläger eine gute Qualität haben.

X: Anzahl der Schläger mit guter Qualität unter n.

$$P(X \geq 150) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq 149) > 0.99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq 149) < 0.01$$

$$p := 0.88 \qquad \mu = 0.88 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.88 \cdot 0.12 \cdot n} = 0.32496 \cdot \sqrt{n}$$

$$\Phi\left(\frac{149 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) < 0.01 \qquad \text{TW:} \quad \frac{149 - \mu + 0.5}{\sigma} < -2.326$$

μ und σ einsetzen: $149 - 0.88 \cdot n + 0.5 < -2.326 \cdot 0.32496 \cdot \sqrt{n}$

Substitution: $z = \sqrt{n}$ $\qquad 0.88 \cdot z^2 - 0.75586 \cdot z - 149.5 > 0$

$$0.88 \cdot z^2 - 0.75586 \cdot z - 149.5 > 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 5\end{array}\right. \rightarrow -\infty < z < -12.612 \vee 13.471 < z < \infty$$

Resubstitution: $n := 13.471^2 = 181.468$

aufrunden: $n \geq 182$

Es müssen mindestens 182 Schläger bestellt werden.

Teilaufgabe 5.0
Der Verein hat den Verdacht, dass der Anteil der Schläger *Battle* mit zu geringer Qualität höher als 12% ist. In einem Test werden 300 Schäger auf dem Signifikanzniveau von 5% auf ihre Qualtität überprüft. Verwenden Sie jeweils die Normalverteilung als Näherung.

Teilaufgabe 5.1 (7 BE)
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie **ohne CAS** den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

Testgröße: X: Anzahl der Schläger geringer Qualtität unter $\mathbf{n} := 300$. $\mathbf{p} := 0.12$

Nullhypothese H_0: $p_0 \leq p \rightarrow p_0 \leq 0.12$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.12$

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, 2, \ldots, k\}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ k+1, k+2, \ldots, 300\}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p = 36$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = 5.628$

$P(\overline{A}) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \geq k+1) \leq 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \leq k) \leq 0.05$

$\Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \geq 0.95 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \geq 0.95$

TW $\quad \frac{k - \mu + 0.5}{\sigma} \geq 1.645 \qquad k \geq 1.645 \cdot \sigma + \mu - 0.5$ **Gleitkommazahl, 5** $\rightarrow k \geq 44.759$

$k_0 := 44.759$ aufrunden: $k := \text{ceil}(k_0) = 45$

$A = \{\ 0, 1, 2, \ldots, 45\} \qquad \overline{A} = \{\ 46, 47, \ldots, 300\}$

Teilaufgabe 5.2 (5 BE)
Erklären Sie, was man bei dem vorliegenden Test unter dem Fehler zweiter Art versteht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art, wenn in Wirklichkeit 16% der Schläger von zu geringer Qualität sind und die Nullhypothese mit bis zu 45 von 300 Schlägern mit schlechter Qualität angenommen wird.

Fehler 2. Art: Aufgrund des Testergebnisses wird angenommen, dass der Anteil der Schläger mit zu geringer Qualität bei 12 % liegt, obwohl dieser Anteil in Wirklichkeit höher ist.

$\mu_{neu} := 300 \cdot 0.16 = 48$ $\qquad$ $\sigma_{neu} := \sqrt{300 \cdot 0.16 \cdot 0.84} = 6.35$

$$\beta = P(A) = P(X \le 45) = \Phi\left(\frac{45 - \mu_{neu} + 0.5}{\sigma_{neu}}\right)$$

1. Möglichkeit: $\mathrm{pnorm}(45 + 0.5, \mu_{neu}, \sigma_{neu}) = 0.34690$

2. Möglichkeit: $\mathrm{knorm}\left(\frac{45 - \mu_{neu} + 0.5}{\sigma_{neu}}\right) = 0.34690$