Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Technik - B II - Lösung**

Teilaufgabe 1.0
Im Labor eines pathologischen Instituts arbeiten 17 Frauen und 3 Männer. An einem Morgen kommen alle Laborangestellten nacheinander zur Arbeit.

Teilaufgabe 1.1 (2 BE)
Berechnen Sie, wie viele verschiedene Reihenfolgen es für bei der Ankunft für die Laborangestellten gibt, wenn man nur nach Geschlecht unterscheidet.

$\frac{20!}{17!\cdot 3!} = 1140$ oder $\binom{20}{3} = 1140$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Den 20 Laborangestellten stehen 22 Spinde zur Verfügung, wobei jeder Angestellte nach seiner Ankunft zufällig einen noch freien Spind auswählt und belegt. Die Wahrscheinlichkeit, mit dem ein Spind ausgewählt wird, ist für alle Spinde gleich groß. Die Spinde sind von 1 bis 22 durchnummeriert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Spinde mit den Nummern 1 und 2 frei bleiben.

Anzahl der Möglichkeiten, 20 aus 22 Spinden auszuwählen: $|\Omega| = \binom{22}{20} = 231$

$\mathrm{combin}(22, 20) = 231$

E: Es werden die Spinde mit den Nummern 3 bis 20 gewählt. $|E| = 1$

$P_E := \frac{1}{231} = 0.00433$

Teilaufgabe 2.0
Im Labor gibt es einen Automaten, der Objektträger mit Plastikfolie versiegeln soll. Der Sensor in diesem sogenannten Eindeckautomaten erkennt manchmal einzelne Objektträger nicht, so dass die nicht erkannten Objektträger nicht versiegelt werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Objektträger den Eindeckautomaten unversiegelt verlässt, beträgt 0,01.

Teilaufgabe 2.1 (10 BE)
An einem Tag durchlaufen 2000 Objektträger nacheinander den Eindeckautomaten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
A: *Von den 2000 Objektträgern werden genau 20 nicht versiegelt.*
B: *Der zwanzigste Objektträger ist der erste nicht versiegelte.*
C: *Spätestens der zwanzigste Objektträger ist der erste nicht versiegelte.*
D: *Von den 2000 Objektträgern werden mindestens 15 und höchstens 25 nicht versiegelt.*
Verwenden Sie für D die Normalverteilung als Näherung.

$p := 0.01 \qquad n := 2000$

$$P(A) = P(X = 20) = \binom{2000}{20} \cdot 0.01^{20} \cdot 0.99^{1980} = 0.08928$$

$$\mathrm{combin}(2000, 20) \cdot \left(0.01^{20} \cdot 0.99^{1980}\right) = 0.08928$$

$$P(B) = 0.99^{19} \cdot 0.01 = 0.00826$$

$$P(C) = 1 - 0.99^{20} = 0.18209$$

$$P(D) = P(15 \le X \le 25) = F(25) - F(14) = \Phi\left(\frac{25 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{14 - \mu + 0.5}{\sigma}\right)$$

$$\mu := n \cdot p = 20 \qquad \sigma := \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 4.45$$

$$\frac{25 - \mu + 0.5}{\sigma} = 1.24 \qquad \frac{14 - \mu + 0.5}{\sigma} = -1.24$$

$$P(D) = \Phi(1.24) - (1 - \Phi(1.24)) = 0.89251 - (1 - 0.89251) = 0.78502$$

Teilaufgabe 2.2 (8 BE)
Berechnen Sie, wie viele Objektträger den Eindeckautomaten mindestens durchlaufen müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens 1000 Objektträger versiegelt werden.

X: Anzahl der versiegelten Objektträger unter n. $\quad p = 0.99$

$$P(X \ge 1000) \ge 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(X \le 999) \ge 0.90 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \le 999) \le 0.10$$

$$\mu := 0.99 \cdot n \qquad \sigma = \sqrt{0.99 \cdot 0.01 \cdot n} = 0.099 \cdot \sqrt{n}$$

$$\Phi\left(\frac{999 - \mu + 0.5}{\sigma}\right) \le 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{999 - 0.99 \cdot n + 0.5}{0.099 \cdot \sqrt{n}} \le -1.281$$

$$\Leftrightarrow \quad 999.5 - 0.99 \cdot n \le -1.281 \cdot 0.099 \cdot \sqrt{n}$$

Substitution: $\quad z = \sqrt{n}$

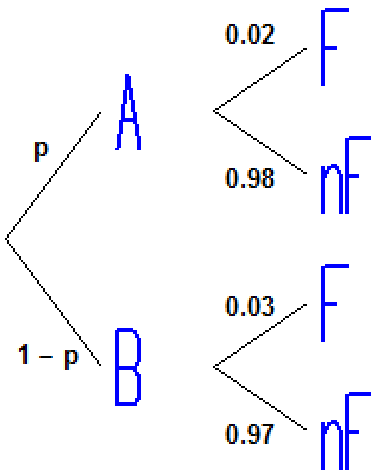
$$0.99 \cdot z^2 - 1.281 \cdot 0.099 \cdot z - 999.5 \ge 0 \ \left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, z \\ \text{Gleitkommazahl}, 6\end{array}\right. \rightarrow -\infty < z \le -31.7102 \lor 31.8383 \le z < \infty$$

$$z_0 := 31.8383$$

$$n := {z_0}^2 = 1013.677 \qquad \text{aufrunden:} \qquad n := \mathrm{ceil}(n) = 1014$$

Teilaufgabe 3.0
Zwei Firmen A und B liefern Objektträger an das Labor des pathologischen Instituts. Von den Objektträgern der Firma A sind 2% fehlerhaft, von jenen der Firma B sind es 3%.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)
Von allen gelieferten fehlerhaften Objektträgern stammen $\frac{2}{3}$ von der Firma A. Berechnen Sie, welchen Anteil die Objektträger der Firma A in der Gesamtlieferung ausmachen.



A: Der Objektträger stammt von Firma A.

B: Der Objektträger stammt von Firma B.

F: Der Objektträger ist fehlerhaft.

$$P_F(A) = \frac{2}{3}$$

$$P_F(A) = \frac{P(F \cap A)}{P(F)} = \frac{0.02 \cdot p}{(1-p) \cdot 0.03 + p \cdot 0.02}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{0.02 \cdot p}{(1-p) \cdot 0.03 + p \cdot 0.02} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot 0.02 \cdot p = 2 \cdot 0.03 - 2 \cdot 0.03 \cdot p + 2 \cdot 0.02 \cdot p$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.06 \cdot p + 0.06 \cdot p - 0.04 \cdot p = 0.06$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.08 \cdot p = 0.06 \qquad p := \frac{0.06}{0.08} = 0.75$$

75 % der Objektträger kommen von der Firma A.

Teilaufgabe 3.2.0
Von den am Morgen zur Verarbeitung bereitgestellten Objektträgern sind am Nachmittag noch 600 Objektträger übrig, die entweder alle von der Firma A oder alle von der Firma B stammen. Die Verpackung für die Objektträger wurde bereits entsorgt, so dass die Lieferfirma nicht mehr feststellbar ist.

Teilaufgabe 3.2.1 (5 BE)
Es wird folgende Entscheidungsregel festgelegt: Wenn von den 600 Objektträgern mindestens 15 fehlerhaft sind, dann werden die 600 Objektträger der Firma B zugeordnet, anonsten der Firma A. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die 600 Objektträger fälschlicherweise der Firma B zugeordnet werden. Verwenden Sie die Normalverteilung als Näherung.

Testgröße: X: Anzahl der fehlerhaften Objektträger unter den restlichen $n := 600$.

Nullhypothese H_0: $p_0 := 0.02$

Gegenhypothese H_1: $p_1 := 0.03$

Annahmebereich von H_0: $A = \{ 0, 1, 2, ..., 14 \}$

Annahmebereich von H_1: $\overline{A} = \{ 15, 16, ..., 600 \}$

Erwartungswert: $\mu := n \cdot p_0 = 12$

Standardabweichung: $\sigma := \sqrt{n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0)} = 3.429$

$$P(\overline{A}) = P(X \geq 15) = 1 - P(X \leq 14) \overset{TW}{=} 1 - \Phi\left(\frac{14 - 12 + 0.5}{3.429}\right) = 1 - \Phi(0.729) = 1 - 0.76730 = 0.233$$

Teilaufgabe 3.2.2 (5 BE)
Berechnen Sie, bis zu welchem Höchstwert der Anzahl von fehlerhaften Objektträgern man die 600 Objektträger der Firma A zuordnen kann, wenn die Wahrscheinlichkeit für eine irrtümliche Zuordnung der 600 Objektträger zur Firma A höchstens 10% betragen soll.

Annahmebereich von H_0: $A = \{ 0, 1, 2, ..., k \}$

Annahmebereich von H_1: $\overline{A} = \{ k + 1, k + 2, ..., 600 \}$

$\mu_{neu} := 600 \cdot 0.03 = 18$ $\sigma_{neu} := \sqrt{600 \cdot 0.03 \cdot 0.97} = 4.179$

$$P(A) \leq 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad P(X \leq k) \leq 0.10 \quad \Leftrightarrow \quad \Phi\left(\frac{k - 18 + 0.5}{4.179}\right) \leq 0.10$$

$$\frac{k - 18 + 0.5}{4.179} \leq -1.281 \qquad k_0 := -1.281 \cdot 4.179 + 18 - 0.5 = 12.147$$

abrunden: $k := \text{floor}(k_0) = 12$ Höchstwert $k = 12$