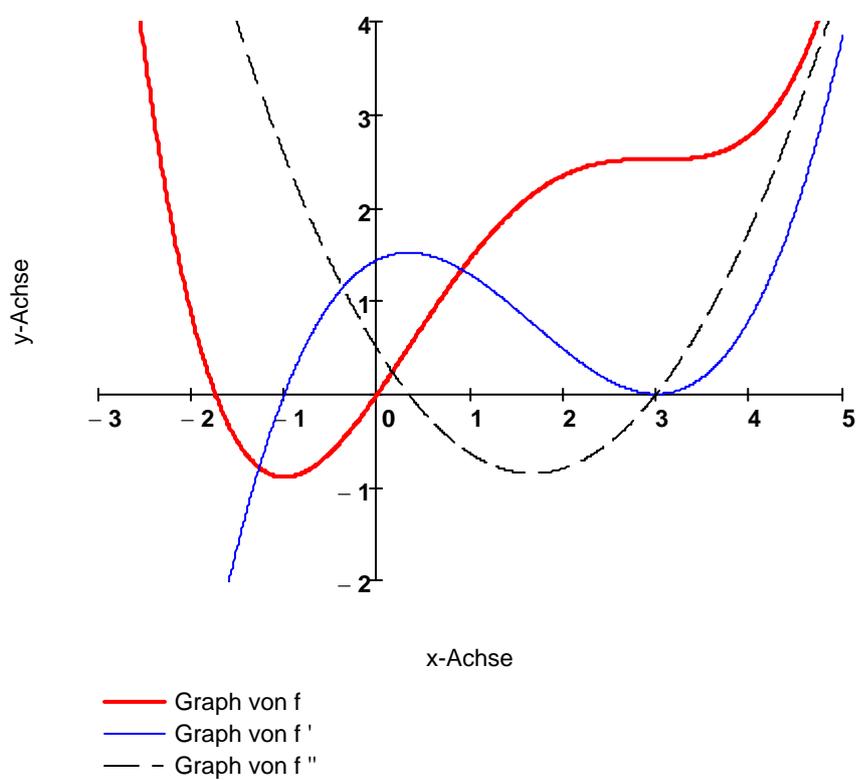


DIFFERENTIALRECHNUNG BEI GANZRATIONALEN FUNKTIONEN



Inhaltsverzeichnis

Kapitel	Inhalt	Seite
1	Der Ableitungsbegriff	1
	1.1 Einführung	1
	1.2 Der Differenzenquotient	1
	1.3 Der Differentialquotient	2
	1.4 Berechnung von Steigungen	4
2	Ableitungsregeln	6
	2.1 Potenzregel	6
	2.2 Faktorregel	7
	2.3 Summenregel	7
3	Tangente und Normale an Graphen von Funktionen	8
	3.1 Funktionale Beschreibung	8
	3.2 Typische Tangentenprobleme	8
4	Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen	11
	4.1 Einführung	11
	4.2 Monotonie	12
	4.3 Krümmung	14
	4.4 Lokale (relative) Extrema und Extrempunkte	16
	4.5 Flachstelle und Flachpunkt, Wendestelle und Wendepunkt	16
	4.6 Zusammenfassung	20
	4.7 Anwendungen in der Physik	21
5	Numerisches Bestimmen der Nullstellen von Funktionen	25

Einführung in die Differentialrechnung

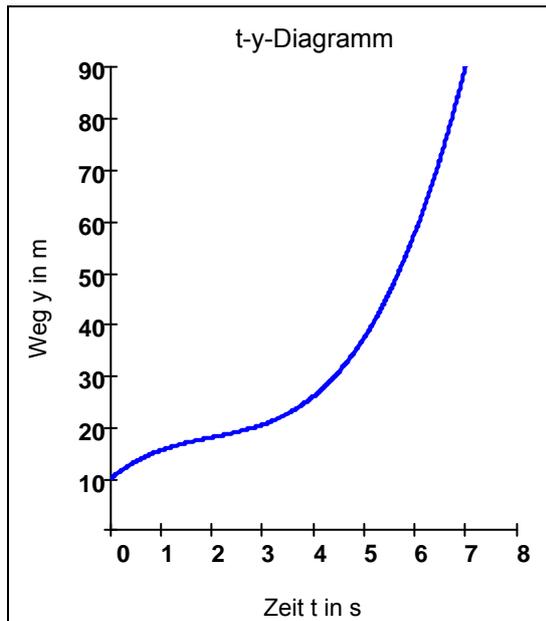
1 Der Ableitungsbegriff

1.1 Einführung

Die Differentialrechnung ermöglicht es, auf der Grundlage des Grenzwertbegriffs Eigenschaften von Funktionen zu untersuchen.

Bekannt ist der Funktionswert einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_0 .

Interessant ist nun die **Änderung des Funktionswerts**, wenn sich das Argument um Δx ändert.



Beispiel:

Der bei einer Bewegung eines Körpers zurückgelegte Weg lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$y(t) = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^3 - 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 8,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 10 \text{ m}$$

Bemerkungen zur Einheit:

$$\text{Ruck (engl. jerk): } [j] = \frac{\text{m}}{\text{s}^3};$$

$$\text{Beschleunigung: } [a] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Geschwindigkeit: } [v] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

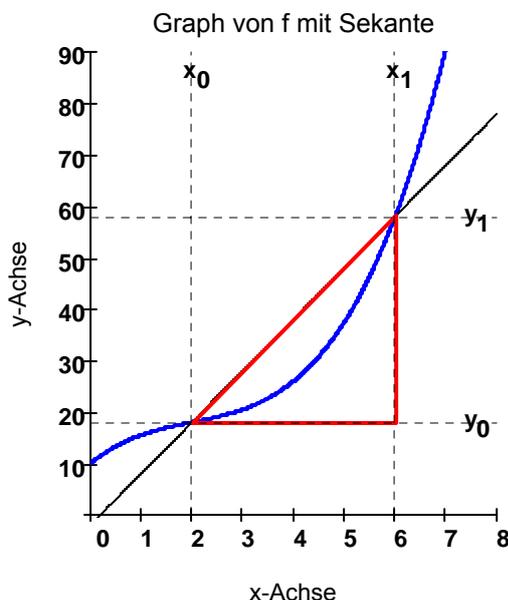
Fragestellungen:

Welche Wegstrecke Δy wird in einem bestimmten Zeitintervall Δt zurückgelegt?

Wie groß sind die Durchschnittsgeschwindigkeit und die Momentangeschwindigkeit?

1.2 Der Differenzenquotient

Gegeben sei die Funktion f mit $f(x) = 0,50x^3 - 3x^2 + 8x + 10$ und $x \in \mathbb{R}$.



Steigung der Sekante:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Weiter gilt: $y_0 = f(x_0)$; $y_1 = f(x_1)$;

$$\text{Einsetzen: } m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Mit $h > 0$ gilt: $x_1 = x_0 + h$

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Definition 1: Differenzenquotient an der Stelle x_0 .

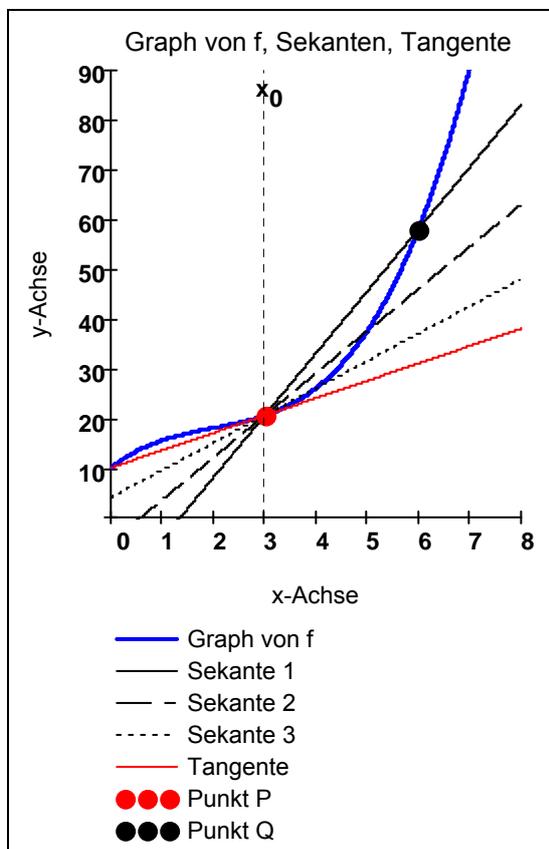
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Bezeichnung: Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$

Definition 2: Differenzenquotient an beliebiger Stelle x .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

1.3 Der Differentialquotient



Der Punkt P der Sekante ist fest.

Der Punkt Q der Sekante wandert auf dem Graphen von f zum Punkt P.

Das bedeutet:

Die **Intervallsekante** geht in

die **Tangente** über und

die **Steigung der Sekante** geht in

die **Steigung der Tangente** über.

Für beliebig kleine h -Werte, also $h \rightarrow 0$, entspricht die **mittlere Änderungsrate** im Intervall $[x_0; x_1]$ der **lokalen Änderungsrate** an der Stelle x_0 . Allerdings ist dann die herkömmliche Berechnung des Differenzenquotienten nicht mehr möglich.

Mithilfe einer Grenzwertrechnung geht der **Differenzenquotient** in den

Differentialquotient über.

Definition 1: Differentialquotient an der Stelle x_0 .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] = f'(x_0) \quad (\text{vgl. Merkhilfe Seite 4})$$

Bezeichnung: $f'(x_0)$ heißt **1. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 .**

Definition 2: Differentialquotient an beliebiger Stelle x .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right] = f'(x)$$

Bezeichnung: $f'(x)$ heißt **1. Ableitung der Funktion f an beliebiger Stelle x .**

Symbole: Für die Ableitung gibt es verschiedene Schreibweisen, die nach ihren Erfindern benannt sind.

Leibnitz: $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)]$

Cauchy: $f'(x)$

Newton: $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt}[f(t)]$



Quelle: Historische Portraits, <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html>

Bezeichnung: $\frac{d}{dx}$ und $\frac{d}{dt}$ werden auch **Operatoren** genannt

Definition 3:

Eine Funktion f mit $x \in \text{ID}_f$ heißt **differenzierbar an der Stelle x_0** , wenn der Differenzenquotient für $x \rightarrow x_0$ bzw. für $h \rightarrow 0$ einen Grenzwert hat.

Für den Differentialquotient an der Stelle x_0 gilt: $f'(x_0) = \frac{d}{dx} f(x_0)$

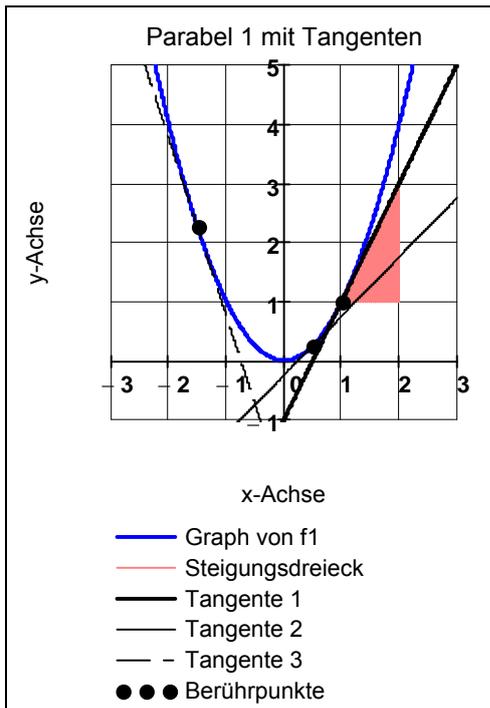
Ist die Funktion f auf ganz ID_f differenzierbar, so erhält man eine neue Funktion, die **Ableitungsfunktion** $f': x \mapsto f'(x) \wedge x \in \text{ID}_f$.

1.4 Berechnung von Steigungen

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktion f_i mit $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^2 + 1$ und $f_3(x) = 0,5x^2$, wobei $x \in \mathbb{R}$.

- Bestimmen Sie den Differenzen- und den Differentialquotienten für die Funktionen f_i . Geben Sie jeweils die Ableitungsfunktion an.
- Bestimmen Sie die Tangentensteigungen an den Stellen $x_1 = 1$; $x_2 = 0,5$; $x_3 = -1,5$.
- Zeichnen Sie das Steigungsdreieck für die Tangente im Punkt $P(x_1 / f_i(x_1))$.



Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \frac{h \cdot (2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h] = 2x$$

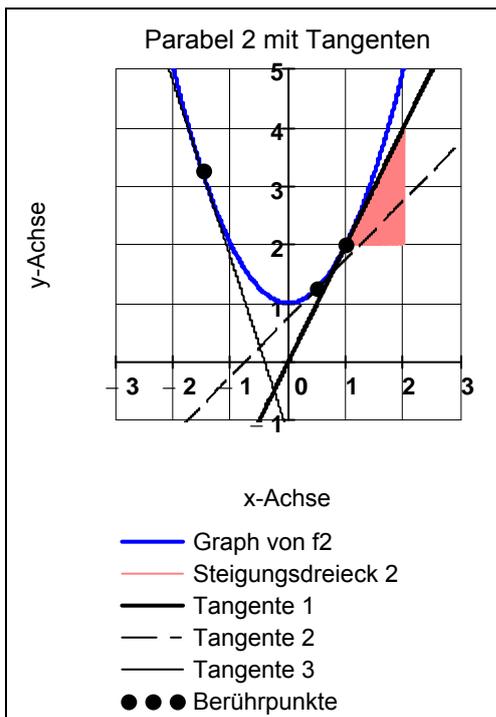
1. Ableitung: $f_1'(x) = 2x$

Tangentensteigungen:

$$f_1'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f_1'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$f_1'(-1,5) = 2 \cdot (-1,5) = -3$$



Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 + 1 - (x^2 + 1)}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 1 - x^2 - 1}{h} = \frac{h \cdot (2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(x+h) - f_2(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [2x + h] = 2x$$

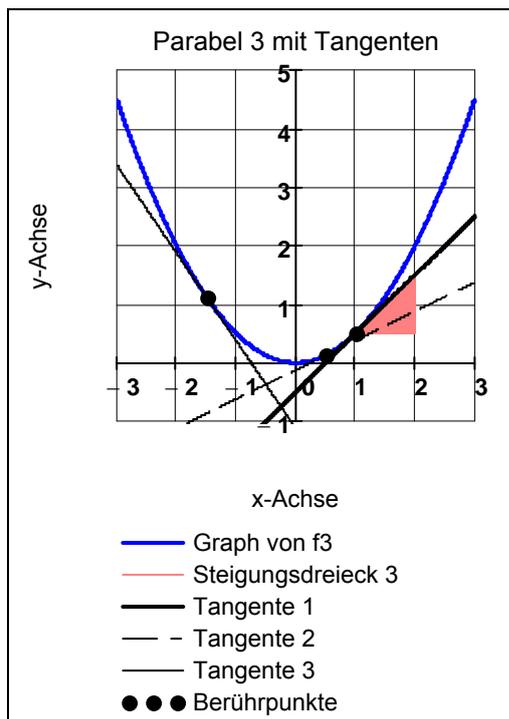
1. Ableitung: $f_2'(x) = 2x$

Tangentensteigungen:

$$f_2'(1) = 2 \cdot 1 = 2$$

$$f_2'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1$$

$$f_2'(-1,5) = 2 \cdot (-1,5) = -3$$



Differenzenquotient:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \frac{0,5(x+h)^2 - 0,5x^2}{h} \\ &= 0,5 \cdot \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = 0,5 \cdot \frac{h \cdot (2x+h)}{h} \\ &= 0,5 \cdot (2x+h)\end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_3(x+h) - f_3(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [0,5 \cdot (2x+h)] \\ &= 0,5 \cdot 2x = x\end{aligned}$$

1. Ableitung: $f_3'(x) = x$

Tangentensteigungen:

$$f_3'(1) = 1$$

$$f_3'(0,5) = 0,5$$

$$f_3'(-1,5) = -1,5$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie von folgenden Funktionen f_i die erste Ableitung mithilfe des Differenzen- bzw. Differentialquotienten:

a) $f_4(x) = x^3$ b) $f_5(x) = \frac{1}{x}$

Lösung zu Teilaufgabe a)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_4(x+h) - f_4(x)}{h} = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} [3x^2 + 3xh + h^2] = 3x^2$$

Lösung zu Teilaufgabe b)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f_5(x+h) - f_5(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x - (x+h)}{(x+h) \cdot x}}{h} = \frac{\frac{-h}{(x+h) \cdot x}}{h} = \frac{-1}{(x+h) \cdot x} = \frac{-1}{x^2 + hx}$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2 + hx} = \frac{-1}{x^2}$$

2 Ableitungsregeln (Merkhilfe Seite 4)

2.1 Potenzregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^n$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Lösung:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} \cdot x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} \cdot x^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} \cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot h^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} \cdot h + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot x \cdot h^{n-2} + \binom{n}{n} \cdot h^{n-1} \right] = \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1}\end{aligned}$$

Allgemeine Regel: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

Beispiele

$$f_4(x) = x^3 \Rightarrow f_4'(x) = 3 \cdot x^2$$

$$f_5(x) = x \Rightarrow f_5'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$$

Erweiterung der Regel auf negative oder auch gebrochene Exponenten.

Beispiele

$$f_7(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \Rightarrow f_7'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = \frac{-1}{x^2}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \Rightarrow f_8'(x) = -2 \cdot x^{-2-1} = \frac{-2}{x^3}$$

$$f_9(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f_9'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$$

$$f_{10}(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f_{10}'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

2.2 Faktorregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot u(x)$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a \cdot u(x+h) - a \cdot u(x)}{h} = a \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = a \cdot u'(x)$$

Allgemeine Regel: $\boxed{f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)}$

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^n + d$, wobei $x \in \mathbb{R}$, $a, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$ mit Begründung.

Lösung: $f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

Begründung:

- (1) Die multiplikative Konstante a bleibt erhalten.
- (2) Der Exponent n erscheint in der Ableitungsfunktion als Faktor vor dem Potenzterm, der Exponent vermindert sich um eins.
- (3) Die additive Konstante d fällt weg.

2.3 Summenregel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$. Gesucht ist die Ableitungsfunktion $f'(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} = u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

Allgemeine Regel: $\boxed{f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)}$

Ebenso: $f(x) = u(x) - v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) - v'(x)$

Beispiel

Gegeben ist die ganzrationale Funktion n -ten Grades f mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ wobei } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0.$$

Nach den Grenzwertregeln für Summen und Differenzen folgt für die Ableitungsfunktion:

$$f'(x) = n \cdot a_n x^{n-1} + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 3 \cdot a_3 x^2 + 2 \cdot a_2 x + a_1$$

3 Tangente und Normale an Graphen von Funktionen

3.1 Funktionale Beschreibung

Mithilfe der Ableitungsfunktion $f'(x)$ kann in jedem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0/f(x_0))$ die Steigung der zugehörigen Tangente berechnet werden. Es gilt also für die

- **Tangentensteigung m** in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen von f : $m = f'(x_0)$

- **Gleichung der Tangente** in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen von f :

(1) Berechnen der y -Koord. von P : $y_0 = f(x_0)$

(2) Bilden der Ableitung von $f(x)$: $f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$

(3) Ermitteln der Tangentensteigung m : $m = f'(x_0)$

(4) Einsetzen dieser Werte in die Punkt-Steigungsform: $y = m \cdot (x - x_0) + y_0$

Gleichung der Tangente: $t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ (vgl. Merkhilfe Seite 5)

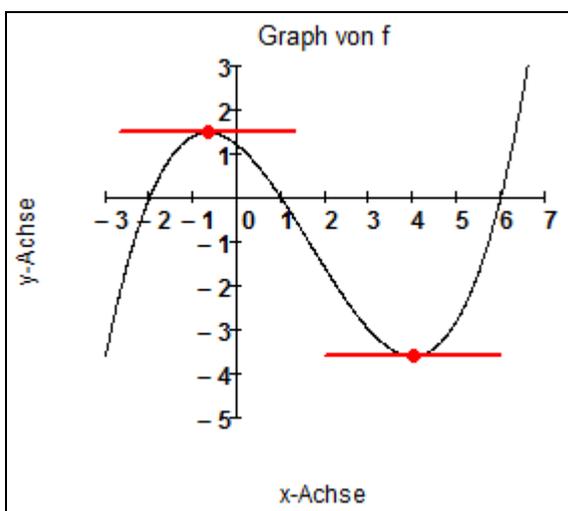
Gleichung der Normalen: $n(x) = \frac{-1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

3.2 Typische Tangentenprobleme

Aufgabe 1

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x^3 - 5x^2 - 8x + 12)$.

Gesucht: Kurvenpunkte $P(x_0/f(x_0))$ mit einer horizontalen (waagrechten) Tangente.



Lösung:

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (3x^2 - 10x - 8)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{2 \cdot 3} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -\frac{2}{3} \approx -0,7; \quad x_2 = 4;$$

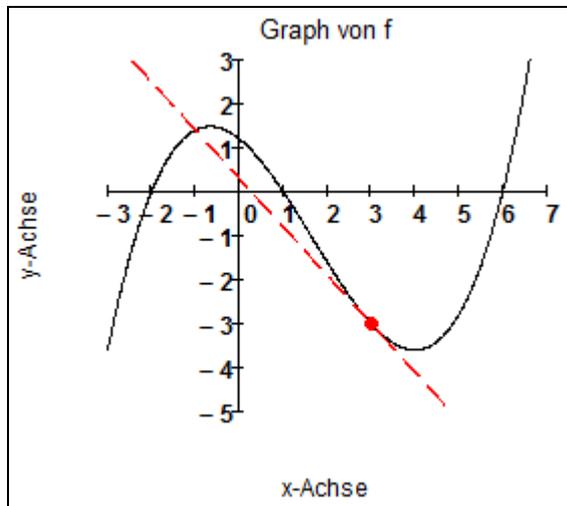
$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27} \approx 1,5 \Rightarrow H(-0,7/1,5)$$

$$f(4) = -\frac{18}{5} = -3,6 \Rightarrow T(4/-3,6)$$

Aufgabe 2

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x^3 - 5x^2 - 8x + 12)$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t im Kurvenpunkt $P(3/?)$.



Lösung:

Funktionswert: $y_P = f(3) = -3$

Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (3x^2 - 10x - 8)$

Steigung der Tangente: $m = f'(3) = -\frac{11}{10}$

Tangente in Punkt-Steigungsform:

$$t(x) = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$$

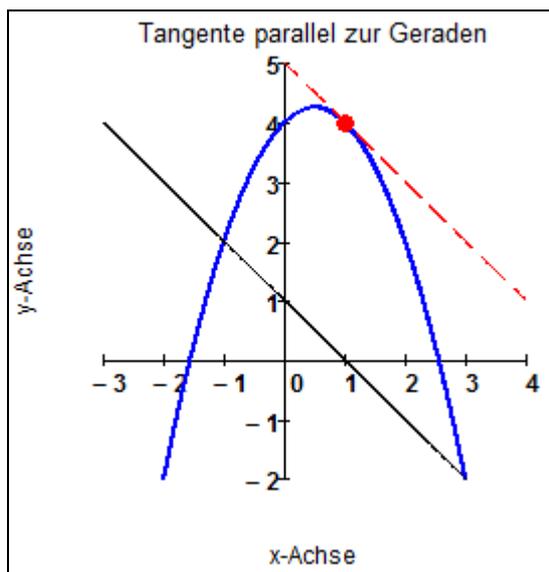
$$t(x) = -\frac{11}{10} \cdot (x - 3) - 3$$

$$t(x) = -\frac{11}{10}x + \frac{3}{10}$$

Aufgabe 3

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = -x^2 + x + 4$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t parallel zur Geraden $g(x) = -x + 1$.



Lösung:

Wähle Punkt $P \in G_f: P(u/v)$

Funktionswert: $v = f(u) = -u^2 + u + 4$

Ableitung: $f'(x) = -2x + 1$

Steigung der Tangente: $m_t = f'(u) = -2u + 1$

Steigung der Geraden: $m_g = -1$

Bedingung: $m_t = m_g$

$$\Leftrightarrow -2u + 1 = -1 \Leftrightarrow u = 1$$

Tangente: $t(x) = m_g \cdot (x - u) + f(u)$

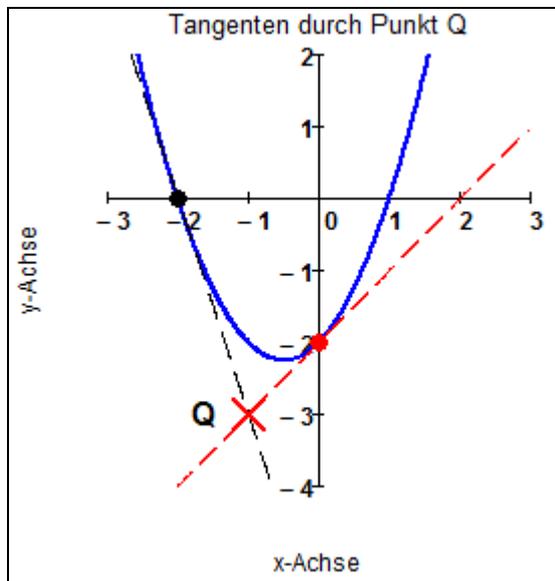
$$t(x) = -(x - 1) + 4$$

$$t(x) = -x + 5$$

Aufgabe 4

Gegeben: Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = x^2 + x - 2$.

Gesucht: Gleichung der Tangente t durch den Punkt Q mit $Q \notin G_f$.



Lösung:

Wähle Punkt $P \in G_f$: $P(u/v)$

Funktionswert: $v = f(u) = u^2 + u - 2$

Ableitung: $f'(x) = 2x + 1$

Steigung der Tangente: $m_t = f'(u) = 2u + 1$

Tangente: $t(x) = m_t \cdot (x - u) + f(u)$

$t(x) = (2u + 1) \cdot (x - u) + u^2 + u - 2$

$t(x) = (2u + 1)x - u^2 - 2$

Bedingung: $Q \in G_t$

$t(-1) = -3 \Leftrightarrow -(2u + 1) - u^2 - 2 = -3$

$\Leftrightarrow u^2 + 2u = 0 \Leftrightarrow u_1 = 0; u_2 = -2$

Tangente 1: $t_1(x) = x - 2$

Tangente 2: $t_2(x) = -3x - 6$

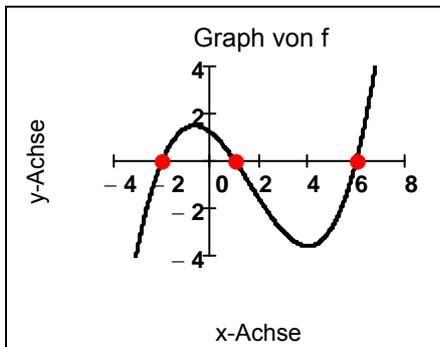
4 Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

4.1 Einführung

Aufgabe

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{10} \cdot (x^3 - 5x^2 - 8x + 12)$ mit $x \in \mathbb{R}$ und die Graphen der Funktion f sowie der Ableitungsfunktionen f' und f'' .

- Bestimmen Sie die Nullstellen von f .
- Bestimmen Sie die erste Ableitung und deren Nullstellen. Betrachten Sie das Vorzeichen von $f'(x)$ und die **Extremstellen** (Stellen extremaler Funktionswerte) von G_f . Was kann man daraus für den Graphen von f und die Art der Extrempunkte schließen?
- Bestimmen Sie die zweite Ableitungsfunktion $f''(x)$. Betrachten Sie das Vorzeichen von $f''(x)$ und die Extremstellen von G_f . Geben Sie jeweils für den Hochpunkt und den Tiefpunkt von G_f das Vorzeichen von $f''(x)$ an.



Teilaufgabe a) $f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

$$(x^3 - 5x^2 - 8x + 12) : (x - 1) = x^2 - 4x - 12$$

$$\frac{-(x^3 - x^2)}{}$$

$$-4x^2 - 8x$$

$$\frac{-(-4x^2 + 4x)}{}$$

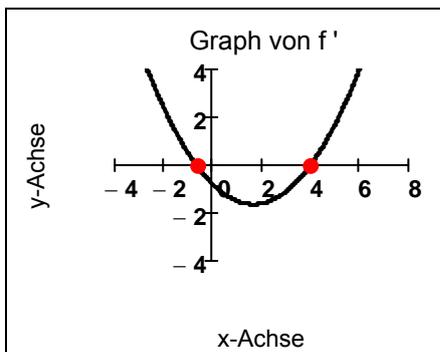
$$-12x + 12$$

$$\frac{-(-12x + 12)}{}$$

$$x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2) \cdot (x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = -2; x_3 = 6;$$



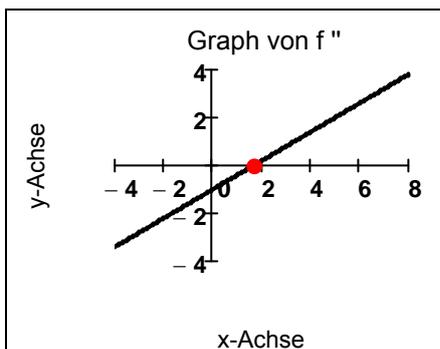
Teilaufgabe b)

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot (3x^2 - 10x - 8)$$

$$3x^2 - 10x - 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 3 \cdot (-8)}}{6} = \frac{10 \pm 14}{6}$$

$$x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = 4;$$



Teilaufgabe c)

$$f''(x) = \frac{1}{10} \cdot (6x - 10)$$

Flachstelle:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_f = \frac{5}{3} \approx 1,7$$

Zu Teilaufgabe b)

x_1 und x_2 sind die Stellen mit horizontalen Tangenten. Damit können die Koordinaten der Extrempunkte H und T des Graphen von f bestimmt werden.

An den Nullstellen von $f'(x)$ ändert sich das Monotonieverhalten von G_f .

Wechselt $f'(x)$ das Vorzeichen von

positiv nach negativ, ergibt sich ein Hochpunkt: $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{40}{27} \approx 1,5 \Rightarrow H(-0,7 / 1,5)$

negativ nach positiv, ergibt sich ein Tiefpunkt: $f(4) = -\frac{18}{5} \approx -3,6 \Rightarrow T(4 / -3,6)$

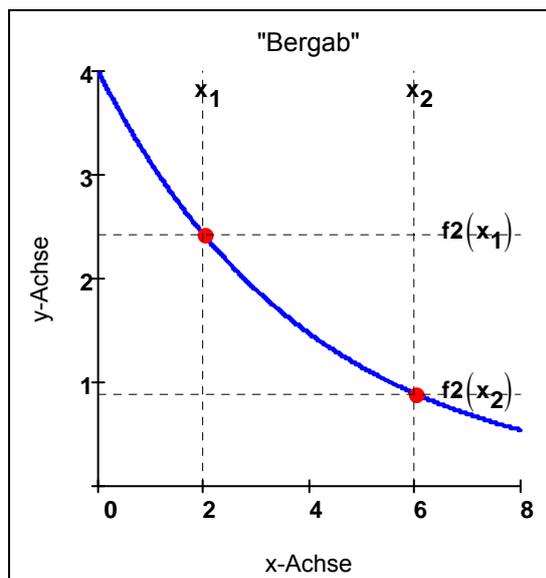
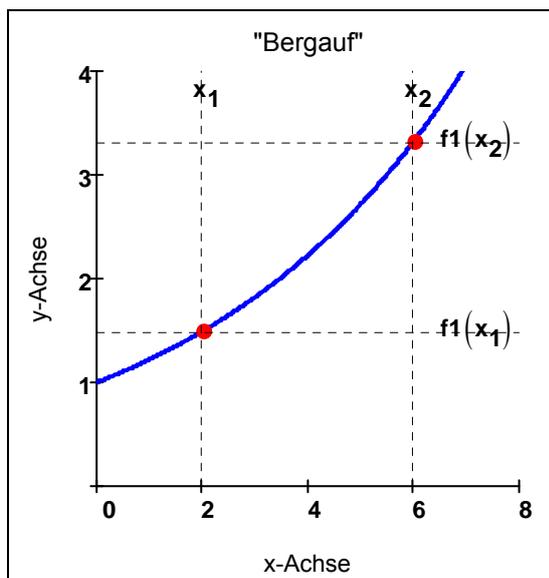
4.2 Monotonie

Definition der Monotonie

Eine Funktion f sei definiert auf einem Intervall $I = [a; b]$ mit $x_1, x_2 \in I$. Es gelte: $x_1 < x_2$.

Gilt für die Funktionswerte $f(x_1) < f(x_2)$, so heißt f im Intervall $[a; b]$ **streng monoton zunehmend**, der Graph der Funktion **streng monoton steigend** (kurz: **sms**).

Gilt für die Funktionswerte $f(x_1) > f(x_2)$, so heißt f im Intervall $[a; b]$ **streng monoton abnehmend**, der Graph der Funktion **streng monoton fallend** (kurz: **smf**).



Monotonie-Kriterium

Ist $f'(x) > 0$, so ist der Graph der Funktion f **streng monoton steigend**

Ist $f'(x) < 0$, so ist der Graph der Funktion f **streng monoton fallend**

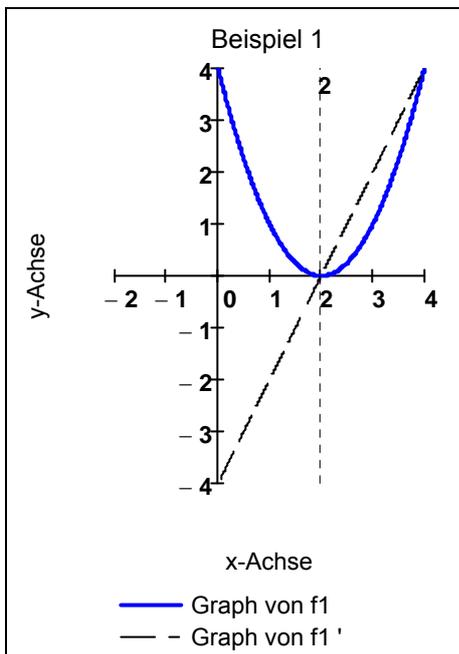
Maximale Monotonieintervalle

Gilt $f'(x_0) = 0$ für **einzelne** Stellen x_0 , so ist der Graph der Funktion im Sinne der Definition dennoch streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend.

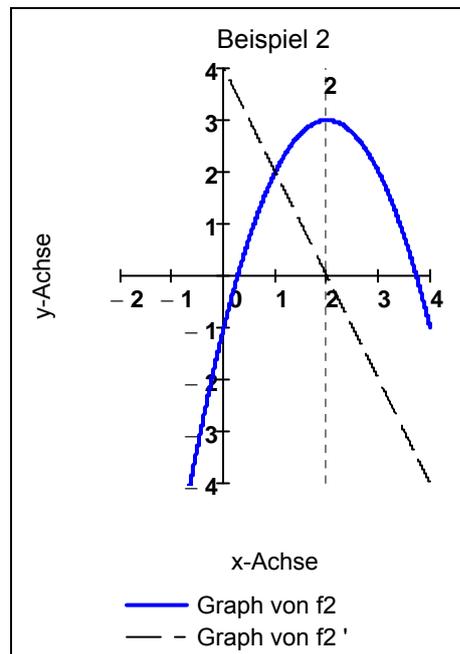
Beispiele

Gegeben sind Graphen der Funktionen $f_i(x)$ und $f_i'(x)$.

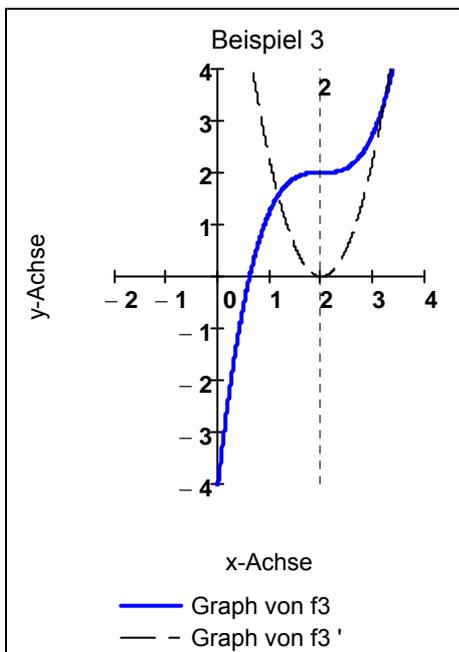
Geben Sie jeweils die Nullstelle der 1. Ableitung an und die maximalen Monotonieintervalle.



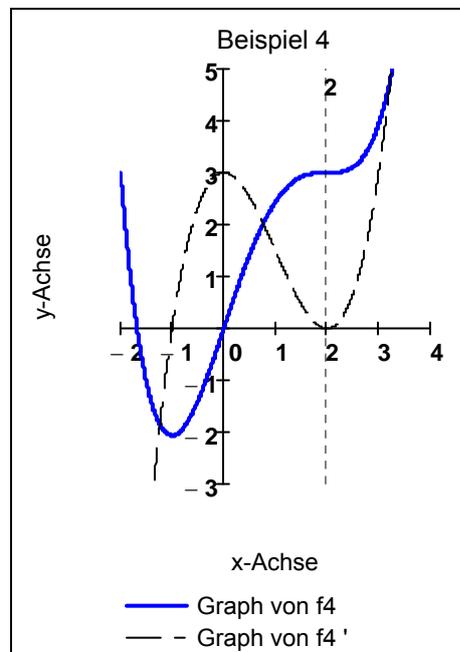
Nullstelle von f_1' : $x_0 = 2$ einfach
 G_{f_1} ist streng monoton fallend in $] -\infty; 2]$ u.
 G_{f_1} ist streng monoton steigend in $[2; \infty[$.



Nullstelle von f_2' : $x_0 = 2$ einfach
 G_{f_2} ist streng monoton steigend in $] -\infty; 2]$ u.
 G_{f_2} ist streng monoton fallend in $[2; \infty[$.



Nullstelle von f_3' : $x_0 = 2$ zweifach
 G_{f_3} ist streng monoton steigend in \mathbb{R} .



NS von f_4' : $x_1 = -1$ einfach, $x_2 = 2$ zweifach,
 G_{f_4} ist streng monoton fallend in $] -\infty; -1]$ u.
 G_{f_4} ist streng monoton steigend in $[-1; \infty[$.

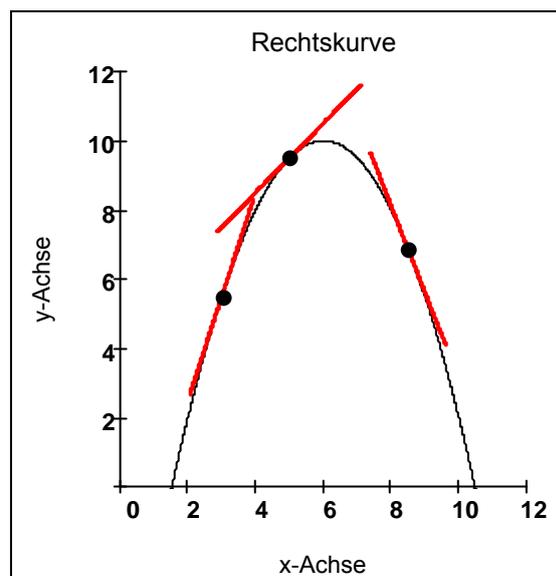
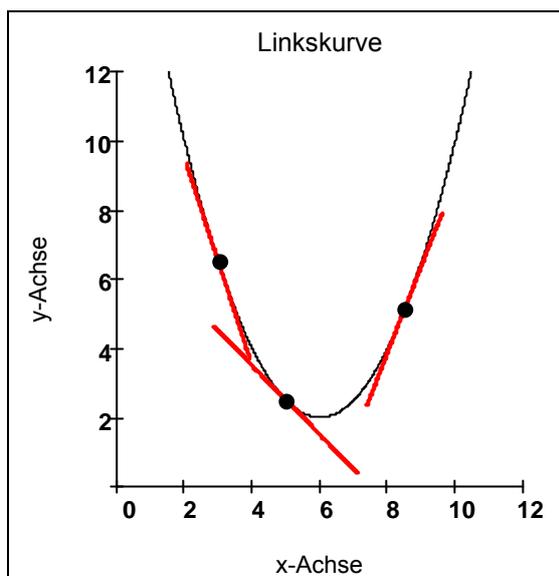
4.3 Krümmung

Definition der Krümmung

Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall $I = [a; b]$ **linksgekrümmt** (kurz: lk), wenn die Steigung der Tangente streng monoton zunimmt.

Der Graph einer Funktion f heißt in einem Intervall $I = [a; b]$ **rechtsgekrümmt** (kurz: rk), wenn die Steigung der Tangente im Intervall I streng monoton abnimmt.

Bemerkung: Die Krümmung wird auch als die **Steigung der Steigung** bezeichnet.



Kriterium der Krümmung

Der Graph der Funktion f heißt **linksgekrümmt**, wenn für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt: $f''(x_0) > 0$.

Der Graph der Funktion f heißt **rechtsgekrümmt**, wenn für alle $x_0 \in [a, b]$ gilt: $f''(x_0) < 0$.

Der Graph der Funktion f besitzt eine **Flachstelle** x_0 , wenn $f''(x_0) = 0$.

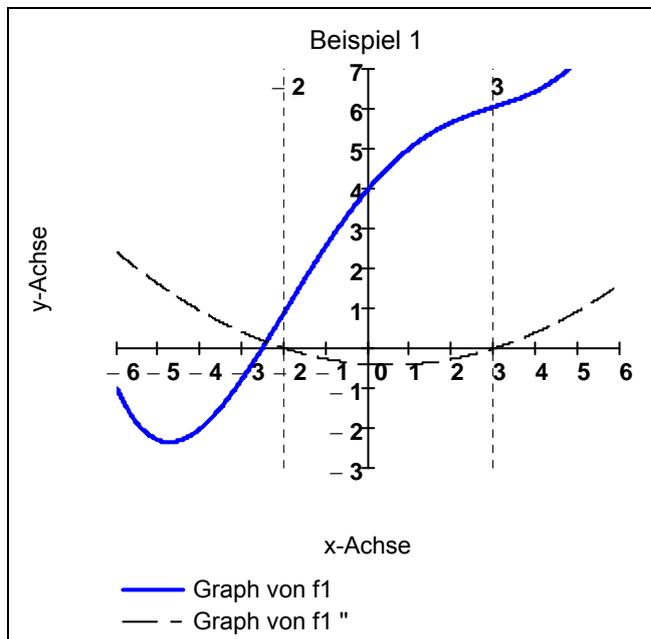
Maximale Krümmungsintervalle

Gilt $f''(x_0) = 0$ für **einzelne** Stellen x_0 , so ist der Graph der Funktion im Sinne der Definition dennoch linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt.

Beispiele

Gegeben sind Graphen der Funktionen $f_i(x)$ und $f_i''(x)$.

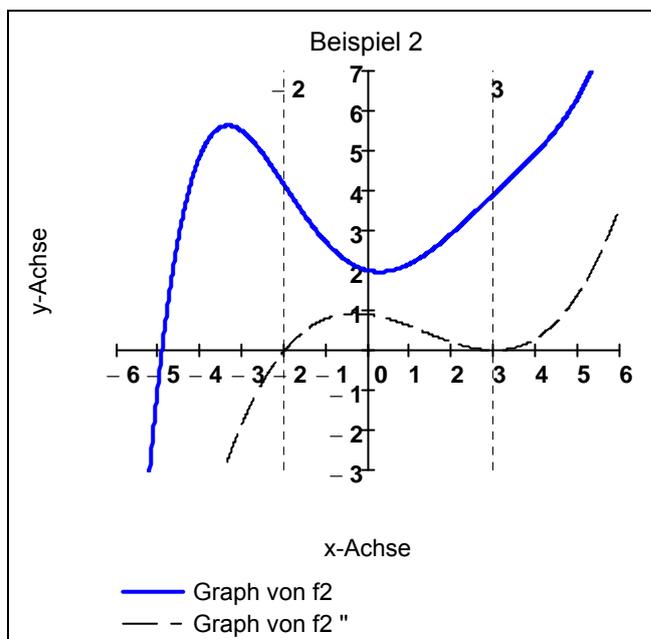
Geben Sie jeweils Lage und Art der Nullstellen der 2. Ableitung an und die maximalen Krümmungsintervalle.



Nullstellen von f_1'' : $x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 3$ einfach;

G_{f_1} ist linksgekrümmt in $]-\infty; -2]$, G_{f_1} ist rechtsgekrümmt in $[-2; 3]$ und

G_{f_1} ist linksgekrümmt in $[3; \infty[$.



Nullstellen von f_2'' : $x_1 = -2$ einfach; $x_2 = 3$ zweifach;

G_{f_2} ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -2]$ und G_{f_2} ist linksgekrümmt in $[-2; \infty[$.

4.4 Lokale (relative) Extrema und Extrempunkte

Definition

Besitzt die Ableitungsfunktion $f'(x)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, so ändert sich das Monotonieverhalten:

Wechselt der Graph von f an der Stelle x_0 sein Monotonieverhalten von streng monoton steigend nach streng monoton fallend, so heißt

$y_0 = f(x_0)$ **lokales Maximum** und der Punkt $(x_0 / f(x_0))$ **lokaler Hochpunkt**.

Wechselt der Graph von f an der Stelle x_0 sein Monotonieverhalten von streng monoton fallend nach streng monoton steigend, so heißt

$y_0 = f(x_0)$ **lokales Minimum** und $(x_0 / f(x_0))$ **lokaler Tiefpunkt**.

Bestimmung lokaler Extrema und Extrempunkte

1. Schritt: Notwendige Bedingung $f'(x) = 0$.

D. h.: Aufsuchen der Stellen mit horizontaler Tangente

2. Schritt: Hinreichende Bedingung:

Die 1. Ableitung hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

Nachweis der Art des relativen Extremums über das Monotoniekriterium oder über das Krümmungsverhalten.

3. Schritt: Für den Extrempunkt Berechnung der y-Koordinate.

4.5 Flachpunkt und Wendepunkt

Definition Flachpunkt und Wendepunkt

Der Graph der Funktion f besitzt an der Stelle x_0 eine **Flachstelle**, wenn $f''(x_0) = 0$ gilt. Der zugehörige Kurvenpunkt $(x_0 / f(x_0))$ heißt **Flachpunkt**.

Ein Flachpunkt heißt **Wendepunkt**, wenn sich dort das Krümmungsverhalten ändert.

Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente heißt **Terrassenpunkt**.

Nachweis für den Wendepunkt

1. Schritt: Notwendige Bedingung $f''(x) = 0$

2. Schritt: Hinreichende Bedingung

Die 2. Ableitung hat eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, das heißt, dass sich das Krümmungsverhalten ändert.

3. Schritt: Berechnung der y-Koordinate

Nachweis für den Terrassenpunkt

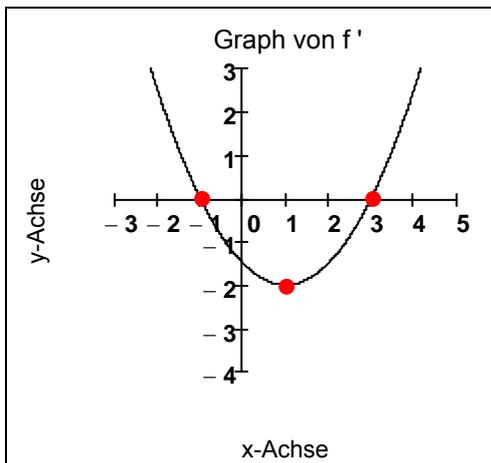
$f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) = 0$ und x_0 ist Nullstelle der 2. Ableitung mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe 1

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 - 9x + 6)$ mit $x \in \mathbb{R}$

sowie die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktionen f' und f'' .

- Bestimmen Sie das Monotonieverhalten und Lage und Art der Extremstellen.
- Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten und Lage und Art der Flachstellen.
- Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der markierten Punkte von G_f .



Teilaufgabe a)

$$f'(x) = \frac{1}{6} \cdot (3x^2 - 6x - 9) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 2x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1) \cdot (x-3) = 0$$

$$x_1 = -1; x_2 = 3;$$

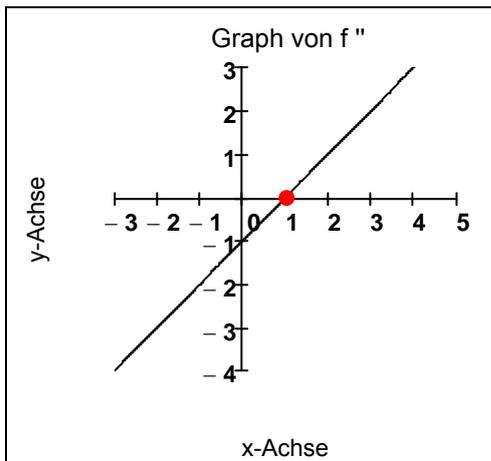
G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; -1]$,

G_f ist streng monoton fallend in $]-1; 3]$,

G_f ist streng monoton steigend in $[3; \infty[$.

\Rightarrow rel. Hochpunkt an der Stelle $x_1 = -1$.

\Rightarrow rel. Tiefpunkt an der Stelle $x_2 = 3$.



Teilaufgabe b)

$$f''(x) = x - 1$$

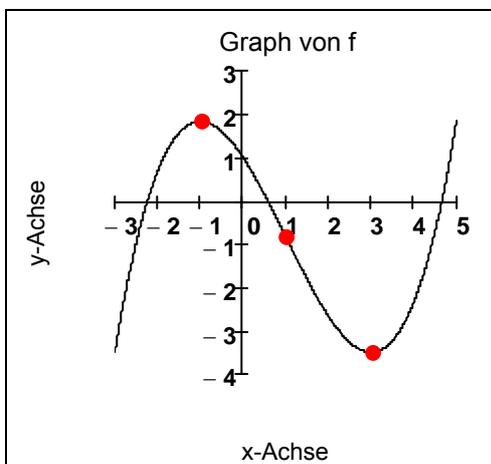
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$$

$$x_3 = 1;$$

G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 1]$,

G_f ist linksgekrümmt in $[1; \infty[$.

\Rightarrow Wendepunkt an der Stelle $x_3 = 1$.



Teilaufgabe c)

$$\text{Hochpunkt: } f(-1) = \frac{11}{6} \approx 1,8; \Rightarrow H(-1/1,8)$$

$$\text{Tiefpunkt: } f(3) = -\frac{7}{2} = -3,5; \Rightarrow T(3/-3,5)$$

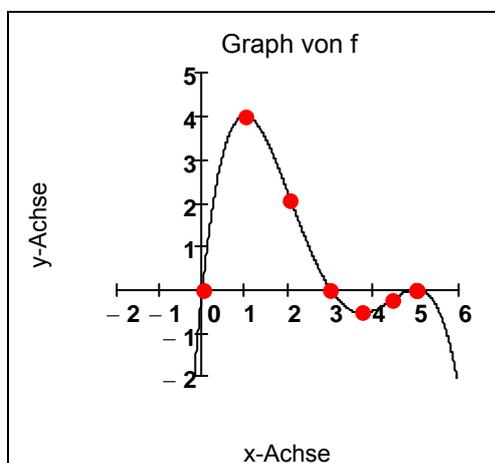
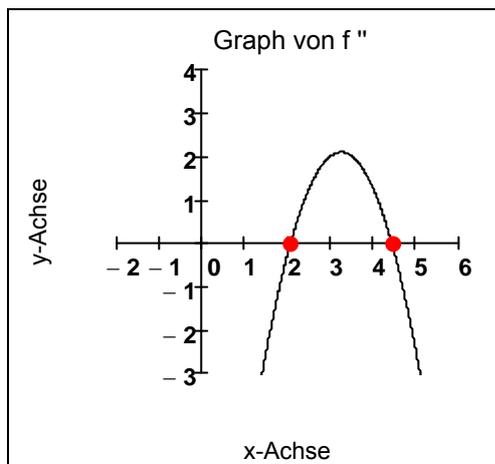
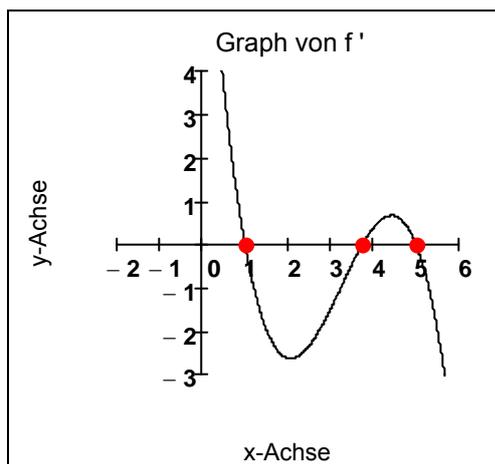
$$\text{Wendepunkt: } f(1) = -\frac{5}{6} \approx -0,8; \Rightarrow W(1/-0,8)$$

Aufgabe 2

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x^4 - 13x^3 + 55x^2 - 75x)$ mit $x \in \mathbb{R}$

sowie die Graphen der Funktion f und der Ableitungsfunktionen f' und f'' .

- Bestimmen Sie Lage und Art der Nullstellen.
- Bestimmen Sie die maximalen Monotonie- und Krümmungsintervalle.
- Bestimmen Sie Lage und Art aller markierten Punkte.
Runden Sie, falls nötig, jeweils auf zwei Nachkommastellen.



Nullstellen: $f(x) = 0$

Ausklammern und Polynomdivision liefert:

$x_1 = 0$ einfach, $x_2 = 3$ einfach;

$x_3 = 5$ zweifach;

1. Ableitung:

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (4x^3 - 39x^2 + 110x - 75)$$

Hor. Tangenten: $f'(x) = 0$

Raten: $x_{E1} = 5$; also Polynomdivision:

$$f'(x) = -\frac{1}{8} \cdot (x - 5) \cdot (4x^2 - 19x + 15)$$

$$4x^2 - 19x + 15 = 0 \Rightarrow x_{E2} = 1; x_{E3} = \frac{15}{4} = 3,75$$

G_f ist streng monoton steigend in $]-\infty; 1]$,

G_f ist streng monoton fallend in $[1; 3,75]$,

G_f ist streng monoton steigend in $[3,75; 5]$ und

G_f ist streng monoton fallend in $[5; \infty[$,

rel. Hochpunkt: $f(1) = 4; H_1(1/4)$

rel. Tiefpunkt: $f(3,75) = -0,55; T(3,75/-0,55)$

rel. Hochpunkt: $f(5) = 0; H_2(5/0)$

2. Ableitung:

$$f''(x) = -\frac{1}{8} \cdot (12x^2 - 78x + 110)$$

Nullstellen von $f''(x)$: $12x^2 - 78x + 110 = 0$

$x_{W1} = 2,07; x_{W2} = 4,43;$

G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 2,07]$,

G_f ist linksgekrümmt in $[2,07; 4,43]$ und

G_f ist rechtsgekrümmt in $[4,43; \infty[$.

Wendepunkt: $f(2,07) = 2,07; W_1(2,07/2,07)$

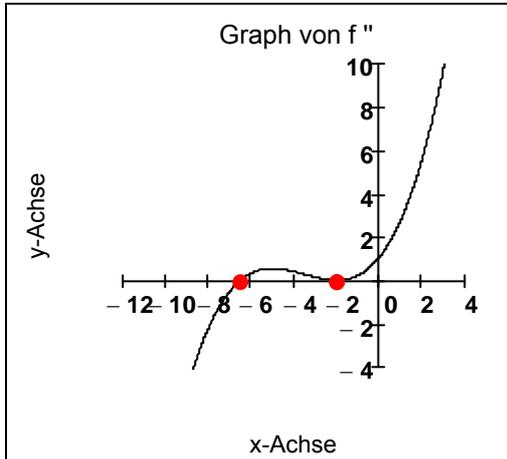
Wendepunkt: $f(4,43) = -0,26; W_2(4,43/-0,26)$

Aufgabe 3

Gegeben ist der Funktionsterm $f(x) = \frac{1}{1000} \cdot (2x^5 + 35x^4 + 200x^3 + 520x^2)$ mit $x \in \mathbb{R}$

sowie die Graphen der Funktionen f und f' .

- Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten und Lage und Art der markierten Punkte.
- Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung der Tangente in den markierten Punkten von G_f .
- Beschreiben Sie jeweils die geometrische Besonderheit der Tangente.



1. Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{100} \cdot (x^4 + 14x^3 + 60x^2 + 104x)$$

2. Ableitung:

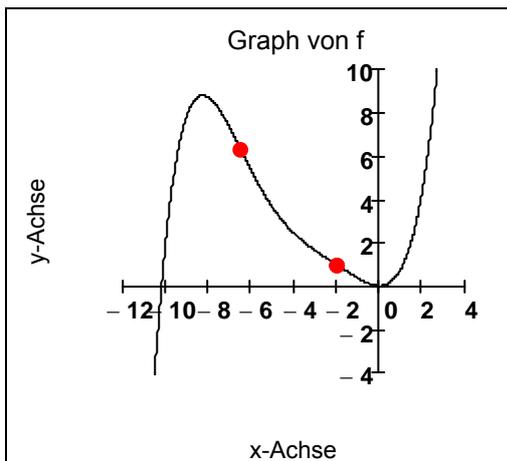
$$f''(x) = \frac{1}{50} \cdot (2x^3 + 21x^2 + 60x + 52)$$

Flachstellen: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 21x^2 + 60x + 52 = 0$$

$$\text{Raten: } f''(-2) = \frac{1}{50} \cdot (-16 + 84 - 120 + 52) = 0$$

$$x_1 = -2$$



Polynomdivision liefert:

$$f''(x) = \frac{1}{50} \cdot (x + 2)(2x^2 + 17x + 26)$$

Weitere Flachstellen: $2x^2 + 17x + 26 = 0$

$$x_2 = -2; x_3 = -6,5;$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -2 \text{ zweifach; } x_3 = -6,5 \text{ einfach;}$$

G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -6,5]$ und

G_f ist linksgekrümmt in $[-6,5; \infty[$.

Wendepunkt: $f(-6,5) = 6,31; \Rightarrow W(-6,5/6,3)$

Flachpunkt: $f(-2) = 0,98; \Rightarrow F(-2/0,98)$

Tangenten:

$$t_w(x) = f'(-6,5) \cdot (x + 6,5) + f(-6,5)$$

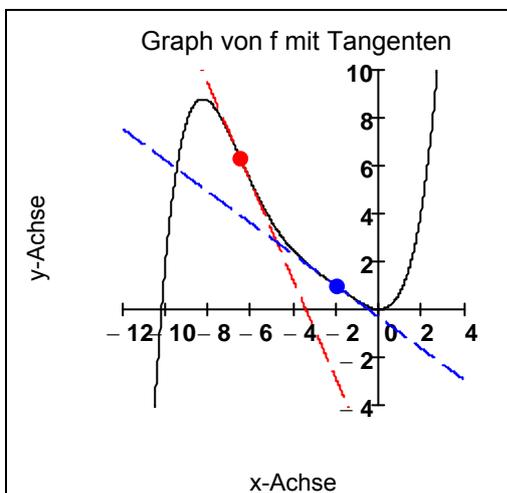
$$t_w(x) = -2,01x - 6,73$$

Tangente durchsetzt den Graphen von f .

$$t_f(x) = f'(-2) \cdot (x + 2) + f(-2)$$

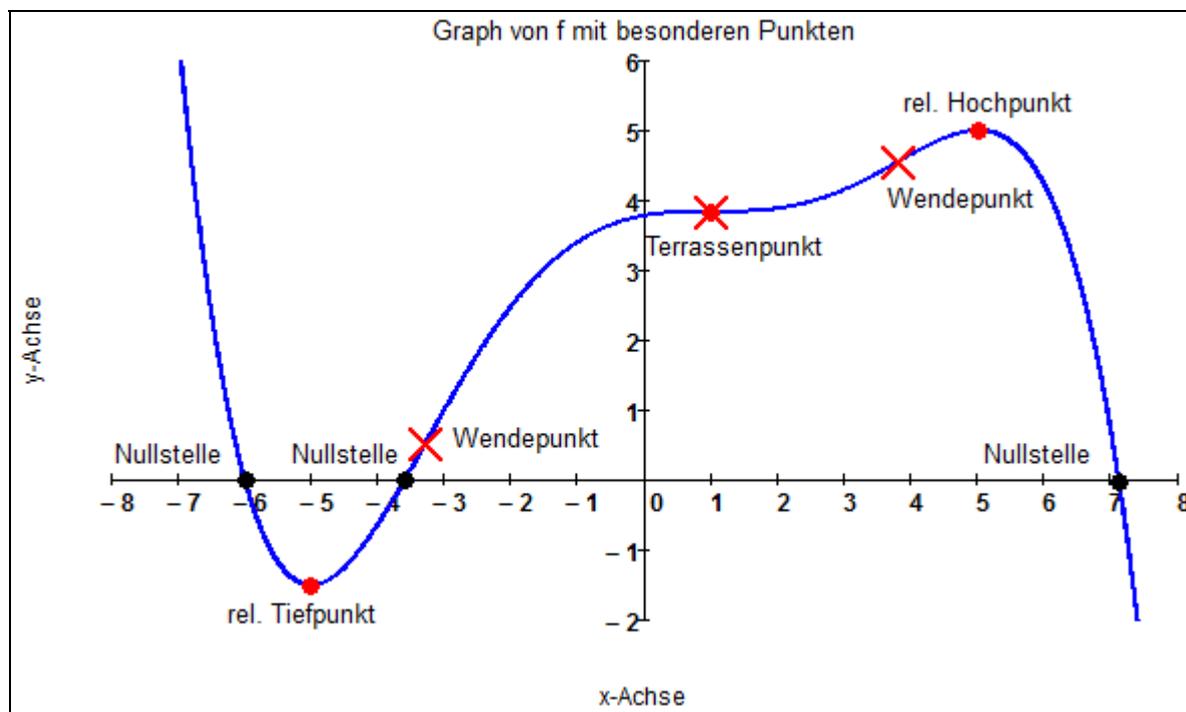
$$t_f(x) = -0,64x - 0,30$$

Tangente berührt den Graphen von f .



4.5 Zusammenfassung der Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen

Umfassende Untersuchung von Funktionen und ihren Graphen auf bestimmte Eigenschaften.



- Verhalten für $x \rightarrow \pm \infty$
- Symmetrieeigenschaften des Graphen
- Nullstellen
- Monotoniebereiche
- Relative Extrempunkte
- Krümmungsverhalten
- Flachpunkte oder Wendepunkte
- Zeichnen des Graphen mit Wertetabelle

Beispiel für „Mathe-Freaks“

Gegeben ist eine Funktion f mit dem Funktionsterm

$$f(x) = \frac{13}{20000} \cdot \left(-2x^5 + 5x^4 + 80x^3 - 250x^2 + 250x + \frac{75625}{13} \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

Bestimmen Sie die Monotonieeigenschaften, Art und Lage (nur x -Werte) der relativen Extrempunkte, das Krümmungsverhalten, Wendepunkte und den Terrassenpunkt.

Hinweis:

Nullstellen durch Intervallhalbierung näherungsweise bestimmen.

Der Graph G_f hat an der Stelle $x_0 = 1$ einen Terrassenpunkt. Überlegen Sie sich, was dies für die erste bzw. zweite Ableitungsfunktion bedeutet.

4.6 Anwendungen in der Physik

Definitionen zur Kinematik

Gegeben ist der zeitliche Ablauf des Weges eines Massenpunktes in x-Richtung in funktionaler Darstellung: $x(t)$

Momentane Geschwindigkeit des Massenpunktes: $v(t) = \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[x(t)]$

Momentane Beschleunigung eines Massenpunktes: $a(t) = \dot{v}(t) = \frac{d}{dt}[v(t)] = \ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}[x(t)]$

Momentane Änderungsrate der Beschleunigung, der Ruck: $j(t) = \dot{a}(t) = \frac{d}{dt}[a(t)]$

Beispiel 1: Geradlinige Bewegung mit konstanter Beschleunigung

Ortskoordinate zum Zeitpunkt t: $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}a_0 \cdot t^2$

Momentane Geschwindigkeit: $v(t) = \dot{x}(t) = v_0 + a_0 \cdot t$

Momentane Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = a_0$

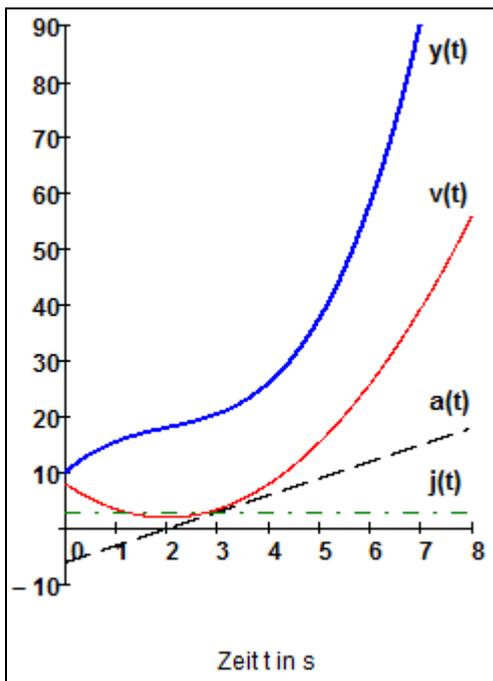
Beispiel 2: Geradlinige Bewegung mit nicht konstanter Beschleunigung (vgl. 1.1)

Ortskoordinate zum Zeitpunkt t: $y(t) = 0,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^3 - 3,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 + 8,0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 10 \text{m}$

Momentangeschwindigkeit: $v(t) = \dot{y}(t) = 1,50 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t^2 - 6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t + 8,0 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Momentane Beschleunigung: $a(t) = \dot{v}(t) = 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3} \cdot t - 6,0 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Ruck: $j(t) = \dot{a}(t) = 3,00 \frac{\text{m}}{\text{s}^3}$



Aufgabe 1

Gegeben sind die Bewegungsgleichungen $x(t)$ und $y(t)$ für den Massenschwerpunkt eines Körpers, der in der Höhe H mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in horizontaler Richtung unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes weggeworfen wird:

$$(1) x(t) = v_0 \cdot t \quad \wedge \quad (2) y(t) = H - \frac{1}{2}g \cdot t^2.$$

- Bestimmen Sie die Bahnkurve $y(x)$ mit allgemeinen Größen.
- Bestimmen Sie die Auftreffstelle und den Auftreffwinkel mit allgemeinen Größen mithilfe der Differentialrechnung.
- Erstellen Sie eine Zeichnung der Bahnkurve mit Tangente an der Auftreffstelle für

$$H = 30 \text{ m}; \quad v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Bewegungsgleichungen $x(t)$ und $y(t)$ für den Massenschwerpunkt eines Körpers, der im Koordinatenursprung mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 unter dem Abwurfinkel α unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes weggeworfen wird:

$$(1) x(t) = \cos(\alpha) \cdot v_0 \cdot t \quad \wedge \quad (2) y(t) = \sin(\alpha) \cdot v_0 \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2.$$

- Bestimmen Sie die Bahnkurve $y(x)$ mit allgemeinen Größen.
- Bestimmen Sie die höchsten Punkt der Bahnkurve mithilfe der Differentialrechnung.
- Erstellen Sie eine Zeichnung der Bahnkurve mit Tangente an der Abwurfstelle für

$$\alpha = 60^\circ; \quad v_0 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}; \quad g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$