Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{-1}{4}\cdot\left(x^3 + 8\cdot x^2 + 16\cdot x\right)$ und $D_f = \mathbb{R}$.

Der Graph wir mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f mit jeweiliger Vielfachheit.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 8\cdot x^2 + 16\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\cdot\left(x^2 + 8\cdot x + 16\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot(x+4)^2 = 0$$

Nullstellen: $x_1 = 0$ einfach $x_2 = -4$ zweifach

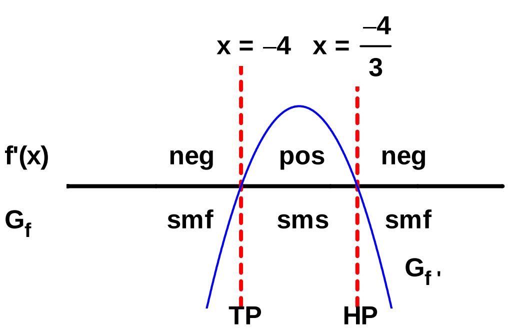
Teilaufgabe 1.2 (8 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

$$f'(x) := \frac{-1}{4}\cdot\left(3\cdot x^2 + 16\cdot x + 16\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\cdot x^2 + 16\cdot x + 16 = 0$$

Waagrechte Tangenten:

$$x_1 = \frac{-16 - \sqrt{16^2 - 4\cdot 3\cdot 16}}{2\cdot 3} = \frac{-16-8}{6} = \frac{-24}{6} = -4 \qquad x_2 = \frac{-16+8}{6} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$



G_f ist streng mon. fallend in $x \in \left]-\infty; -4\right]$,

G_f ist streng mon. steigend in $x \in \left[-4; \frac{-4}{3}\right]$,

G_f ist streng mon. fallend in $x \in \left[\frac{-4}{3}; \infty\right[$.

$f(-4) = 0 \qquad TP(\,-4 \mid 0\,)$

$f\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{64}{27} \qquad HP\left(\frac{-4}{3} \mid \frac{64}{27}\right)$

Teilaufgabe 1.3 (5 BE)
Berechnen Sie die maximale positive Steigung des Graphen G_f.

Stärkste Steigung im Wendepunkt.

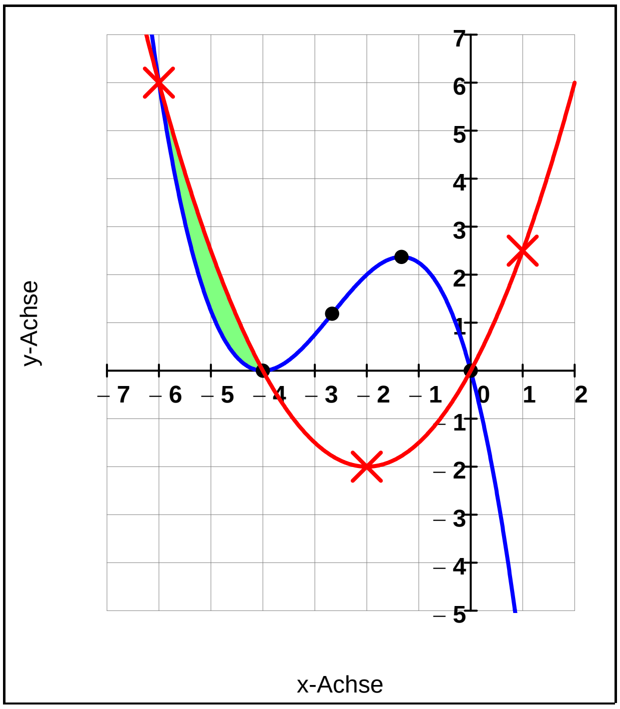
$$f''(x) := \frac{-1}{4}\cdot(6\cdot x + 16)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\cdot x + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = \frac{-8}{3}$$

Wendestelle, da Nullstelle mit Vorzeichenwechsel

maximale Steigung: $f'\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{4}{3}$

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-6 \le x \le 1$ unter Kennzeichnung bisheriger Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.



$x_d := -6 .. 1$

$x_d =$	$f(x_d) =$	$p(x_d) =$
-6	6	6
-5	1.3	2.5
-4	0	0
-3	0.8	-1.5
-2	2	-2
-1	2.3	-1.5
0	0	0
1	-6.3	2.5

Teilaufgabe 2.0
Der Graph G_p der quadratischen Funktion p enthält die Punkte A(-6 | 6), B(-2 | -2) und C(1 | 2,5).

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x).

[Mögliches Ergebnis: $p(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(x^2 + 4\cdot x\right)$]

$$p(x,a,b,c) := a\cdot x^2 + b\cdot x + c$$

Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} p(-6,a,b,c) = 6 \\ p(-2,a,b,c) = -2 \\ p(1,a,b,c) = \frac{5}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 36\cdot a - 6\cdot b + c = 6 \\ 4\cdot a - 2\cdot b + c = -2 \\ a + b + c = \frac{5}{2} \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, b, c \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizienten: $a_0 = 0.5$ $b_0 = 2$ $c_0 = 0$

Funktionsterm: $p(x) := p\left(x, a_0, b_0, c_0\right)$

$$p(x) = \frac{x^2}{2} + 2\cdot x$$

Teilaufgabe 2.2 (2 BE)
Zeichnen Sie den Graphen G_p im Bereich $-6 \le x \le 1$ in das vorhandene Koordinatensystem ein.

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)
Die Graphen G_f und G_p schließen insgesamt zwei endliche Flächenstücke ein. Markieren Sie im vorhandenen Koordinatensystem das weiter links gelegene und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Die ganzzahligen Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.

$$A = \int_{-6}^{-4} (p(x) - f(x))\, dx$$

Differenzfunktion: $p(x) - f(x) = \frac{x^3}{4} + \frac{5\cdot x^2}{2} + 6\cdot x$

Stammfunktion: $D(x) := \int (p(x) - f(x))\, dx \rightarrow \frac{x^4}{16} + \frac{5\cdot x^3}{6} + 3\cdot x^2$

$D(-4) = \frac{32}{3}$ $D(-6) = 9$ $A := D(-4) - D(-6)$ $A = \frac{5}{3} = 1.667$

Teilaufgabe 3.0

Gegeben sind die reellen Funktionen h_t mit $h_t(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot (t \cdot x - 1) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3)$, $D_{h_t} = \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 3.1 (7 BE)

Bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion h_t in Abhängigkeit von t.

$h_t(x) = 0 \qquad x \cdot (t \cdot x - 1) \cdot (x + 4) \cdot (x - 3) = 0$

$t \neq 0 \wedge t \neq \frac{-1}{4} \wedge t \neq \frac{1}{3} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{1}{t} \qquad x_3 = -4 \qquad x_4 = 3$

vier einfache Nullstellen

NR: $\frac{1}{t} = -4$ auflösen, $t \rightarrow -\frac{1}{4} \qquad \frac{1}{t} = 3$ auflösen, $t \rightarrow \frac{1}{3}$

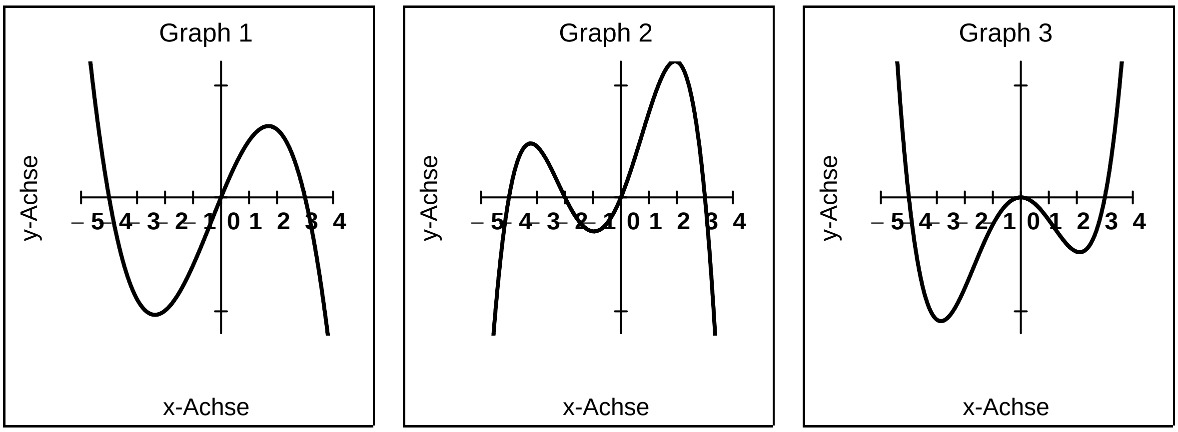
$t = \frac{-1}{4} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -4 \qquad x_3 = 3$ drei Nullstellen

$t = \frac{1}{3} \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -4 \qquad x_3 = 3$ drei Nullstellen

$t = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = -4 \qquad x_3 = 3$ drei Nullstellen

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)

Begründen Sie, welche der im Folgenden dargestellten Graphen zur Funktionenschar h_t gehören können und welche nicht. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung mithilfe der ganzzahligen Nullstellen und ggf. des Grenzverhaltens bzw. des Leitkoeffizienten. Geben Sie für den Fall, dass der Graph zur Funktionenschar h_t gehört, den zutreffenden Wert von t an.



Graph 1: $h(x,0) = -\frac{x\cdot(x-3)\cdot(x+4)}{4}$

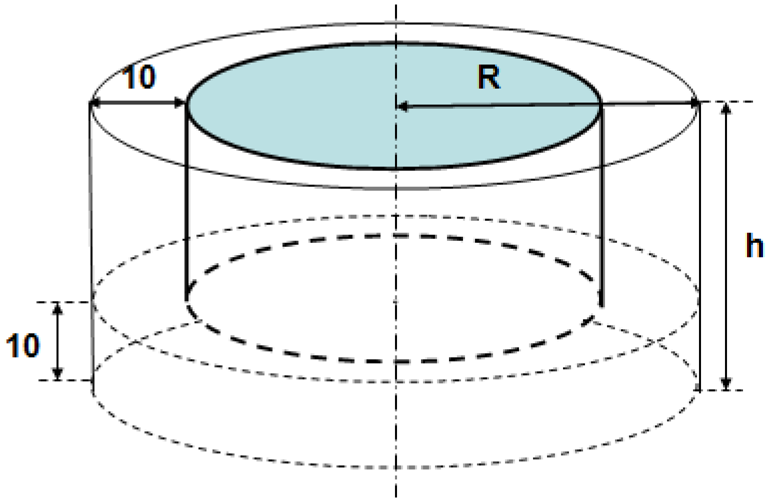
$t = 0$ drei einfache Nullstellen und negativer Leitkoeffizient

Graph 2: $h\left(x,-\frac{1}{2}\right) = -\frac{x\cdot(x-3)\cdot(x+4)\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)}{4}$

$t = -\frac{1}{2}$ vier einfache Nullstellen und negativer Leitkoeffizient

Graph 3: gehört nicht zur Funktionenschar, da es für kein t ekne doppelte Nullstelle $x = 0$ gibt.

Teilaufgabe 4.0
Ein Planschbecken soll entsprechend folgender Skizze hergestellt werden, wobei der Boden und die Wand luftgefüllte Hohlkammern mit einer Dicke von 10 cm sind. Die Summe aus Radius R und Höhe h soll konstant 90 cm betragen.



Teilaufgabe 4.1 (6 BE)
Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, welche die Maßzahl des Volumens des mit Luft gefüllten Teils des Planschbeckens in Abhängigkeit von R beschreibt.
[Mögliches Ergebnis: $V(R) = \pi\cdot\left(-10\cdot R^2 + 1700\cdot R - 8000\right)$]

Zielfunktion: Volumen großer Zylinder - Volumen kleiner Zylinder

$$V(R,h) = R^2\cdot\pi\cdot h - (R-10)^2\cdot\pi\cdot(h-10)$$

$$V(R,h) = R^2\cdot\pi\cdot h - \left(R^2 - 20\cdot R + 100\right)\cdot\pi\cdot(h-10)$$

$$V(R,h) = \pi\cdot\left[R^2\cdot h - \left(R^2\cdot h - 10\cdot R^2 - 20\cdot R\cdot h + 200\cdot R + 100\cdot h - 1000\right)\right]$$

$$V(R,h) = \pi\cdot\left(10\cdot R^2 + 20\cdot R\cdot h - 200\cdot R - 100\cdot h + 1000\right)$$

Nebenbedingung: $R + h = 90 \quad\Rightarrow\quad h = 90 - R$

Einsetzen: $V(R,h) = \pi\cdot\left[10\cdot R^2 + 20\cdot R\cdot(90-R) - 200\cdot R - 100\cdot(90-R) + 1000\right]$

Vereinfachen: $V(R) = \pi\cdot\left(10\cdot R^2 + 1800\cdot R - 20\cdot R^2 - 200\cdot R - 9000 + 100\cdot R + 1000\right)$

$$V(R) = \pi\cdot\left(-10\cdot R^2 + 1700\cdot R - 8000\right)$$

Teilaufgabe 4.2 (5 BE)
Mit der Vorgabe $10 < R \le 55$ soll die Funktion $V: R \mapsto V(R)$ den absolut größten Wert annehmen.
Berechnen Sie für diesen Fall die maximale Füllhöhe des Planschbeckens.

$V'(R) := \pi \cdot (-20 \cdot R + 1700)$

$V'(R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -20 \cdot R + 1700 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_0 = \frac{1700}{20} = 85$ nicht in der Definitionsmenge

G_V ist stetig im Intervall $10 < R \le 55$ uns streng monoton steigend.

Randwerte: $\lim\limits_{R \to 10^+} V(R) \to 8000 \cdot \pi = 25133$

$V(55) = 173573$

$\Rightarrow$ absolut größter Wert von V bei $R_{max} = 55$

Füllhöhe großer Zylinder: $h := 90 - 55 = 35$

Füllhöhe kleiner Zylinder: 25 cm