Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

• Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{3}{16}\cdot(x+3)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot(4-x)$ und $D_f = \mathbb{R}$.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Bestimmen Sie die Nullstellen von f und geben Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) für $x \to -\infty$ und $x \to \infty$ an.

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+3)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot(4-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -3 \qquad x_2 = \frac{-4}{3} \qquad x_3 = 4$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \to \infty \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} f(x) \to -\infty$$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)

Zeigen Sie, dass sich f(x) auch in der Form $f(x) := \frac{-1}{16}\cdot\left(3\cdot x^3 + x^2 - 40\cdot x - 48\right)$

$$\frac{3}{16}\cdot(x+3)\cdot\left(x+\frac{4}{3}\right)\cdot(4-x) = \frac{3}{16}\cdot\left(x^2+\frac{13}{3}\cdot x+4\right)\cdot(4-x) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{3}{16}\cdot\left(4\cdot x^2 - x^3 + \frac{52}{3}x - \frac{13}{3}\cdot x^2 + 16 - 4\cdot x\right) = \frac{3}{16}\cdot\left(-x^3 - \frac{1}{3}\cdot x^2 + \frac{40}{3}x + 16\right) = \ldots$$

$$\ldots = \frac{-1}{16}\cdot\left(3\cdot x^3 + x^2 - 40\cdot x - 48\right)$$

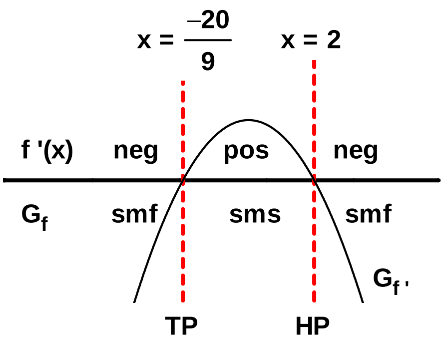
Teilaufgabe 1.3 (6 BE)

Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_f.

$$f'(x) := \frac{-1}{16}\cdot\left(9\cdot x^2 + 2\cdot x - 40\right)$$

Horizontale Tangenten:

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9\cdot x^2 + 2\cdot x - 40 = 0 \text{ auflösen}, x \to \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{20}{9} \end{pmatrix} \qquad x_{h1} = \frac{-20}{9} \qquad x_{h2} = 2$$



$$f\left(\frac{-20}{9}\right) = -\frac{196}{243} = -0.8$$

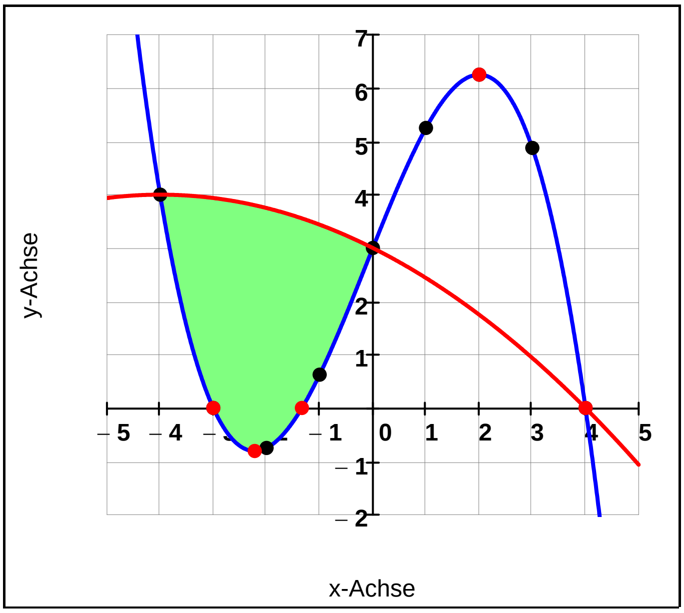
TP (−2.2 | −0.8)

$$f(2) = \frac{25}{4} = 6.3$$

HP (2 | 6.3)

Teilaufgabe 1.4 **(4 BE)**
Zeichnen Sie den Graphen von f im Bereich $-4 \le x \le 4$, auch unter Verwendung vorliegender Ergebnisse, in ein kartesisches Koordinatensystem. Maßstab: 1 LE = 1 cm.

$$x_d := -4 .. 4$$



$x_d =$	$f(x_d) =$	$p(x_d) =$
-4	4.0	4.0
-3	0.0	3.9
-2	-0.8	3.8
-1	0.6	3.4
0	3.0	3.0
1	5.3	2.4
2	6.3	1.8
3	4.9	0.9
4	0.0	0.0

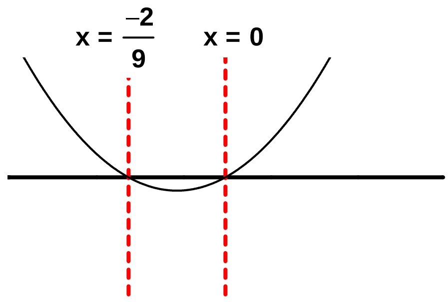
Teilaufgabe 1.5 **(6 BE)**
Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen G_f im Schnittpunkt mit der y-Achse. Bestimmen Sie dann den Bereich, in dem die Steigung des Graphen G_f größer ist als die berechnete Tangentensteigung.

$$f'(0) = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) > f'(0) \rightarrow \frac{5}{2} - \frac{x}{8} - \frac{9 \cdot x^2}{16} > \frac{5}{2}$$

Umformung: $-\frac{x}{8} - \frac{9 \cdot x^2}{16} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \cdot x^2 + 2 \cdot x < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (9 \cdot x + 2) < 0$

NR: $x \cdot (9 \cdot x + 2) = 0 \qquad x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{-2}{9}$



gesuchtes Intervall:

$J =]\, \frac{-2}{9} \,;\, 0\, [$

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Die Parabel P ist der Graph der quadratischen Funktion p. $S(-4 \mid 4)$ ist der Hochpunkt von P und zugleich Schnittpunkt von P mit G_f. Ein weiterer Schnittpunkt der beiden Graphen liegt auf der y-Achse.
Ermitteln Sie den Funktionsterm von p und zeichnen Sie die Parabel P im Bereich $-4 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem ein.
[Mögliches Teilergebnis: $p(x) = \frac{-1}{16} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + 3$]

Ansatz für die Parabel: $p(x) = a \cdot (x + 4)^2 + 4$

$f(0) = 3 \qquad p(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad 16 \cdot a + 4 = 3 \text{ auflösen}, a \rightarrow -\frac{1}{16}$

$\Rightarrow \quad p(x) := \frac{-1}{16} \cdot (x + 4)^2 + 4$

Zum Vergleich: $p(x) = 3 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{16}$

Teilaufgabe 1.7 (5 BE)
Die Graphen G_f und P schließen zwei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.

Differenzfunktion: $d(x) := p(x) - f(x) = \frac{3 \cdot x^3}{16} - 3 \cdot x$

Stammfunktion $D(x) := \int (p(x) - f(x))\, dx = \frac{3 \cdot x^4}{64} - \frac{3 \cdot x^2}{2}$

Fläche: $A := D(0) - D(-4) \qquad A = 12$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist die Funktionenschar g_a mit $g_a(x) = 0.25 \cdot \left(x^3 - 2 \cdot a \cdot x^2\right)$ und $x, a \in IR$.

Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 **(5 BE)**

Ermitteln Sie die Nullstellen von g_a und geben Sie deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a an.

$g_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 - 2 \cdot a \cdot x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot (x - 2 \cdot a) = 0$

$a \neq 0 \qquad x_1 = 0$ zweifache Nullst. $\qquad x_2 = 2 \cdot a$ einfache Nullst.

$a = 0 \qquad x_1 = 0$ dreifache Nullst.

Teilaufgabe 2.2.0

Nun wird $a = 3$ gesetzt und es gilt: $g_3(x) = 0.25 \cdot \left(x^3 - 6 \cdot x^2\right)$. Des Weiteren ist die lineare Funktion t mit $t(x) := -3 \cdot x + 2$ mit $x \in IR$ gegeben.

Teilaufgabe 2.2.1 **(4 BE)**

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von G_3.

$g'_3(x) := 0.25 \cdot \left(3 \cdot x^2 - 12 \cdot x\right)$

$g''_3(x) = 0.25 \cdot (6 \cdot x - 12)$

$g''_3(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6 \cdot x - 12 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = 2$ Wendestelle, da Nullst. mit Vorzeichnewechsel

Wendepunkt: $\qquad g_3(2) = -4 \qquad WP(\, 2 \mid -4\,)$

Teilaufgabe 2.2.2 **(5 BE)**

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die abschnittsweise definierte Funktion

$$h(x) = \begin{cases} g_3(x) & \text{if } x \le 2 \\ t(x) & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

an der Nahtstelle differenzierbar ist.

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{1}{4} \cdot \left(x^3 - 6 \cdot x^2\right)\right] \to -4$$

$$\lim_{x \to 2^+} (-3 \cdot x + 2) \to -4 \qquad \Rightarrow \qquad G_h \text{ ist stetig an der Stelle } x_0 = 2$$

$g_3(2) = -4$

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\cdot\left(3\cdot x^2 - 12\cdot x\right) & \text{if } x < 2 \\ -3 & \text{if } x > 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{1}{4}\cdot\left(3\cdot x^2 - 12\cdot x\right)\right] \rightarrow -3$$

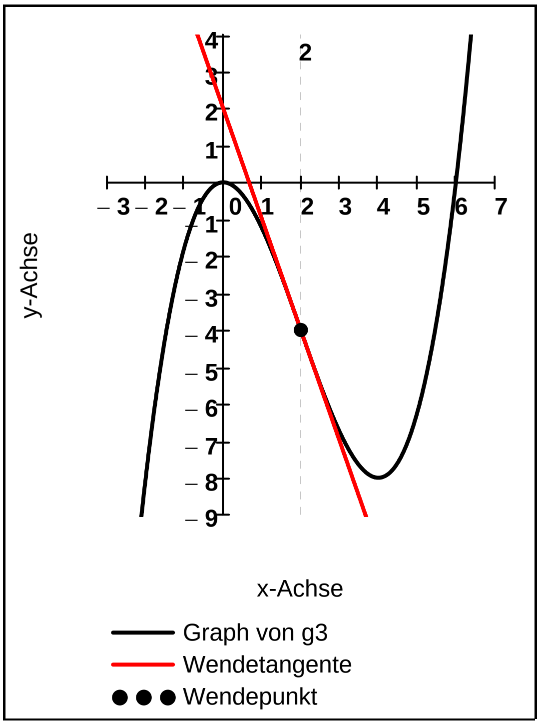
$\Rightarrow$ G_h ist differenzierbar an der Stelle $x_0 = 2$

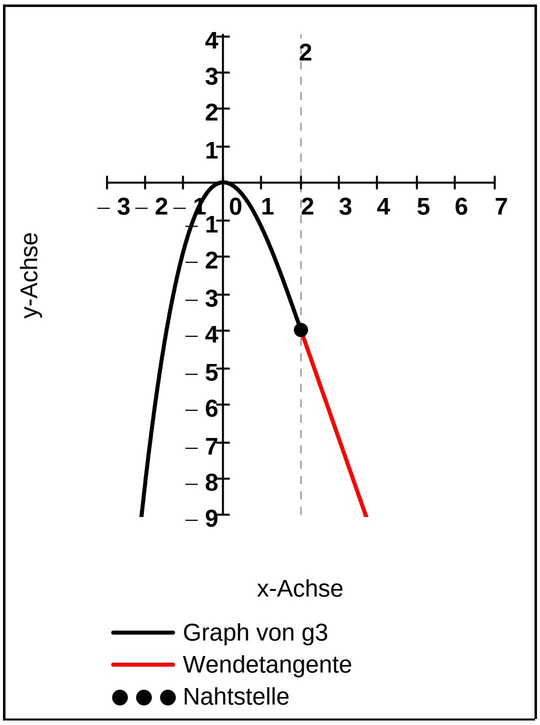
$$\lim_{x \to 2^+} (-3) \rightarrow -3$$

Teilaufgabe 2.2.3 (2 BE)
Beschreiben Sie mithilfe der Ergebnisse der letzten beiden Teilaufgaben die besondere Lage des Graphen der linearen Funktion t in Bezug auf G_3.

G_t ist die Wendetangente von G_{g_3}.

$x1 := -3, -2.99 .. 2$ $x2 := 2, 2.01 .. 7$

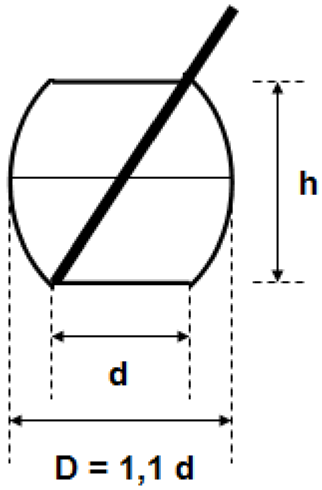




Teilaufgabe 3.0
Ein symmetrischer Trinkjoghurtbecher in der Form eines Fasses besitzt das Volumen

$$V = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(2\cdot D^2 + d^2\right).$$

Hierbei ist d jeweils der Durchmesser des Deckels und des Bodens und D der maximale Durchmesser des Bechers auf halber Höhe (alle Längen in cm gemessen). Weiterhin soll D 10% größer sein als d. Der Becher soll so konsturiert sein, dass ein 13 cm langer Strohhalm genau um 3 cm aus dem Becher herausragt, wenn er diagonal im Becher liegt (siehe Abbildung).



Teilaufgabe 3.1 **(4 BE)**
Stellen Sie eine Gleichung der Funktion V auf, die die Maßzahl des Bechervolumens in Abhängigkeit von der Höhe h beschreibt.

[Mögliches Ergebnis: $V(h) = \frac{57}{200}\cdot\pi\cdot\left(-h^3 + 100\cdot h\right)$]

Zielfunktion: $V = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(2\cdot D^2 + d^2\right)$

Pythagoras: $h^2 + d^2 = 10^2 \quad\Rightarrow\quad d^2 = 100 - h^2$

$D^2 = 1.1^2\cdot d^2$

einsetzen: $V(h) = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left[2\cdot 1.21\cdot d^2 + \left(100 - h^2\right)\right]$

$V(h) = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left[2\cdot 1.21\cdot\left(100 - h^2\right) + \left(100 - h^2\right)\right]$

$V(h) = \frac{1}{12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(100 - h^2\right)\cdot(2.42 + 1) = \frac{342}{100\cdot 12}\cdot\pi\cdot h\cdot\left(100 - h^2\right)$

$V(h) := \frac{57}{200}\cdot\pi\cdot\left(-h^3 + 100\cdot h\right)$

Teilaufgabe 3.2 **(7 BE)**
Mit der Vorgabe $5 \le h \le 9$ soll der Becher für eine kostenlose Probe das geringste Volumen aufweisen. Berechnen Sie für diesen Fall die Höhe h in cm und das zugehörige Volumen in cm^3 auf eine Nachkommastelle gerundet.

$$V'(h) = \frac{57}{200} \cdot \pi \cdot \left(-3 \cdot h^2 + 100\right)$$

$$V'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \cdot h^2 + 100 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{100}{3}$$

$h_1 = -\sqrt{\frac{100}{3}}$ nicht definiert $\qquad h_2 := \sqrt{\frac{100}{3}} \qquad h_2 = 5.774$

Funktionswert: $\quad V(h_2) = \frac{190 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3} = 344.622$

Vergleich mit den Randwerten:

$$V(5) = \frac{855 \cdot \pi}{8} = 335.758$$

$$V(9) = \frac{9747 \cdot \pi}{200} = 153.106$$

Absolut kleinster Wert $V_{min} = 153.1$ für $h = 9 \cdot cm$.