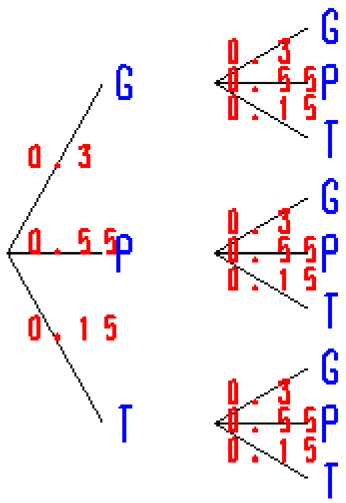
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 12 Nichttechnik - S II - Lösung**

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.0
Am Pausenstand einer Schule werden Kaltgetränke in Glaflaschen (G), Plastikflaschne (P) und Tetrapacks (T) angeboten. Innerhalb einer Woche werden insgesamt 2080 Kaltgetränke verkauft, darunter 624 in Glasflaschen. Der Anteil der Plastikflaschen beträgt 55%. Die Bestimmung des wöchentlichen Kaufverhaltens eines zufällig herausgegriffenen Schülers, der zwei Klatgetränke pro Woche kauft, wird als Zufalllsexperiment aufgefasst.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Erstellen Sie ein vollständiges Baumdiagramm und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten aller 9 Elementarereignisse.



$p(G\ G) = 0.3 \cdot 0.3 = 0.09$

$p(G\ P) = 0.3 \cdot 0.55 = 0.165$

$p(G\ T) = 0.3 \cdot 0.15 = 0.045$

$p(P\ G) = 0.55 \cdot 0.3 = 0.165$

$p(P\ P) = 0.55 \cdot 0.55 = 0.3025$

$p(P\ T) = 0.55 \cdot 0.15 = 0.0825$

$p(T\ G) = 0.15 \cdot 0.3 = 0.045$

$p(T\ P) = 0.15 \cdot 0.55 = 0.0825$

$p(T\ T) = 0.15 \cdot 0.15 = 0.0225$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Gegeben seien folgende Ereignisse:

E_1: *Ein Schüler kauft zwei Kaltgetränke derselben Verpackungsart.*

E_2: *Ein Schüler kauft mindestens ein Kaltgetränk in der Glasflasche.*

E_3: $\overline{\left(E_1 \cup \overline{E_2}\right)}$

Geben Sie diese Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an. Beschreiben Sie E_3 möglichst einfach mit Worten und berechnen Sie $P\left(E_3\right)$.

$E_1 = \{\ GG, PP, TT\ \}$ $\qquad$ $E_2 = \{\ GG, GP, GT, PG, TG\ \}$

$E_3 = \overline{\left(E_1 \cup \overline{E_2}\right)} = \overline{E_1} \cap E_2 \quad \Rightarrow \quad E_3 = \{\ GP, GT, PG, TG\ \}$

E_3: Es wird genau ein Kaltgetränk in der Glasflasche gekauft.

$P\left(E_3\right) = 0.165 + 0.045 + 0.165 + 0.045 = 0.42$

Teilaufgabe 1.3.0
Die Glasflasche kostet 10 Cent Pfand, eine Plastikflasche 15 Cent und ein Tetrapack ist pfandfrei. Die Zufallsgröße X gibt in Euro an, wie viel Pfand ein zufällig herausgegriffener Schüler in einer Woche gezahlt hat.

Teilaufgabe 1.3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X in Tabellenform.

$$\begin{pmatrix} \omega_i & GG & GP & GT & PG & PP & PT & TG & TP & TT \\ X & 0.20 & 0.25 & 0.10 & 0.25 & 0.30 & 0.15 & 0.10 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung:

$$\begin{pmatrix} x_i & 0 & 0.10 & 0.15 & 0.20 & 0.25 & 0.30 \\ P(X = x_i) & 0.0225 & 0.09 & 0.165 & 0.09 & 0.33 & 0.3025 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.3.2 (3 BE)
Berechnen Sie, wie viel Pfand ein Schüler erwartungsgemäß in einem Schuljahr zahlt. Gehen Sie dabei von 38 Schulwochen aus.

Pfand po Woche:

$$\mu := 0 \cdot 0.0225 + 0.10 \cdot 0.09 + 0.15 \cdot 0.165 + 0.20 \cdot 0.09 + 0.25 \cdot 0.33 + 0.30 \cdot 0.3025 \qquad \mu = 0.225$$

Pfand pro Schuljahr: $38 \cdot \mu = 8.55$

Ein Schüler zahlt 8,55 € Pfand pro Schuljahr.

Teilaufgabe 1.3.3 (3 BE)
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit der gezahlte wöchentliche Pfandbetrag um maximal 10 Cent vom Erwartungswert abweicht.

$$P(\mu - 0.1 \le X \le \mu + 0.1) = P(0.125 \le X \le 0.325) = ...$$

$$... = P(X = 0.15) + P(X = 0.20) + P(X = 0.25) + P(X = 0.30) = ...$$

$$... = 0.165 + 0.09 + 0.33 + 0.3025 = 0.8875$$

Teilaufgabe 2.0
Bei der Leerung der Müllkörbe wurde festgestellt, dass regelmäßig Pfandflaschen zu finden sind. Die nach B(n ; p) verteilte Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl der weggeworfenen Flaschen. Von n verkauften Flaschen werden im Mittel 40 Flaschen nicht zurückgegeben. Die Varianz beträgt 24.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)
Berechnen Sie die Anzahl n der verkauften Pfandflaschen und die Wahrscheinlichkeit p, dass eine Pfandflasche in den Müll geworfen wird.

Gegeben: $\mu = 40$ $\sigma^2 = 24$ n unbekannt

Binomialverteilung: $\mu = n \cdot p$ $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1 - p)$

$n \cdot p = 40$ $40 \cdot (1 - p) = 24$

$1 - p = \frac{24}{40}$

$p := 1 - \frac{24}{40}$ $p = 0.4$ $n := \frac{40}{0.4} = 100$

Teilaufgabe 2.2 (4 BE)
Setzen Sie nun n = 100 und p = 0,4. Bestimmen Sie damit die Wahrscheinlichkeiten der beiden folgenden Ereignisse:
E_4: *Genau 65 Pfandflaschen werden am Pausenverkauf zurückgegeben.*
E_5: *Mehr als 28 aber weniger als 45 Flaschen werden nicht zurückgegeben.*

$$P(E_4) = P(X = 65) = B(100, 0.4, 65) = 0.04913$$

$$P(E_5) = P(28 < X < 45) = P(X \le 44) - P(X \le 28) = \sum_{i=0}^{44} B(100, 0.4, i) - \sum_{i=0}^{28} B(100, 0.4, i)$$

$$P(E_5) = 0.82110 - 0.0084 = 0.8127$$

Teilaufgabe 3.0
Die SMV behauptet, dass sich nach Durchführung einer Umwelt-Kampagne die schlechte Retourquote von lediglich 60% der Pfandflaschen erhöht hat (Gegenhypothese). Um den Erfolg dieser Aktion zu überprüfen, werden 100 markierte Flaschen in Hinblick auf ihre Rückgabe untersucht.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

Testgröße X: Anzahl der zurückgegebenen Flaschen unter $\mathbf{n = 100}$ Flaschen. $\mathbf{p := 0.6}$

H_0: $\mathbf{p_0 \le p \rightarrow p_0 \le 0.6}$ H_1: $\mathbf{p_1 > p \rightarrow p_1 > 0.6}$

$\mathbf{A = \{\ 0, 1, \dots, k\}}$ $\mathbf{\overline{A} = \{\ k+1, k+2, \dots, 100\}}$

$\mathbf{P(X \ge k+1) \le 0.05} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1 - P(X \le k) \le 0.05} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{P(X \le k) \ge 0.95}$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=0}^{k} \mathbf{B(100, 0.6, i) = 0.96015} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k = 68} \qquad \mathbf{\overline{A} = \{\ 69, 70, \dots, 100\}}$$

Teilaufgabe 3.2 (2 BE)
Interpretieren Sie im Sachzusammenhang, welche Entscheidung der Test nahelegt, wenn 35% der Flaschen im Test nicht zurückgegeben werden.

zurückgegebene Flaschen: $\mathbf{0.65 \cdot 100 = 65}$

$65 \in A$

Aufgrund des Testergebnisses kann kein positiver Einfluss auf die Rückgabe festgesrtllt werden.

Teilaufgabe 4 (5 BE)
Betrachtet werden nun folgende Ereignisse.
E_6: *Eine Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben.*
E_7: *Eine Pfandflasche enthielt Mineralwasser.*
E_8: *Ein Pfandflasche wurde am Pausenverkauf zurückgegeben und enthielt kein Mineralwasser.*

Dabei gelte: $\mathbf{P(E_6) = 0.6;\ P(E_7) = 0.3;\ P(E_8) = 0.42}$

Zeigen Sie, dass die beiden Ereignisse E_6 und E_7 vereinbar und stochastisch unabhängig sind.

$\mathbf{P(E_6 \cap E_7) = P(E_6) - P(E_8) = 0.6 - 0.42 = 0.18}$ ungleich 0, Ereignisse sind vereinbar.

$\mathbf{P(E_6 \cap E_7) = P(E_6) \cdot P(E_7) = 0.6 \cdot 0.3 = 0.18}$ Ereignisse sind stochastisch unabhängig.