Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Nichttechnik - A I - Lösung**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{x^2 - 4 \cdot x - 5}{2 \cdot x + 4}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Der Graph heißt G_f.

Teilaufgabe 1.1 (4 BE)
Bestimmen Sie die Nullstellen von f und die Art der Definitionslücke. Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte in der Umgebung der Definitionslücke.

$$f(x) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 - 4 \cdot x - 5 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Nullstellen: $x_1 = -1$ $x_2 = 5$

$x + 2$ kann nicht aus dem Nenner herausgekürzt werden.

$\Rightarrow$ $x = -2$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel.

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)
Ermitteln Sie die Gleichungen der beiden Asymptoten von G_f und deren Art.

[Teilergebnis: $f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot x - 3 + \dfrac{7}{2 \cdot x + 4}$]

$$\left(x^2 - 4 \cdot x - 5\right) : (2 \cdot x + 4) = \frac{1}{2} \cdot x - 3 + \frac{7}{2 \cdot x + 4}$$

$$-\left(x^2 + 2 \cdot x\right)$$

$$-6 \cdot x - 5$$

$$-(-6 \cdot x - 12)$$

$$7$$

Schiefe Asymptote A_1: $g(x) := \dfrac{1}{2} \cdot x - 3$

Senkrechte Asymptote A_2: $x = -2$

Teilaufgabe 1.3 (7 BE)

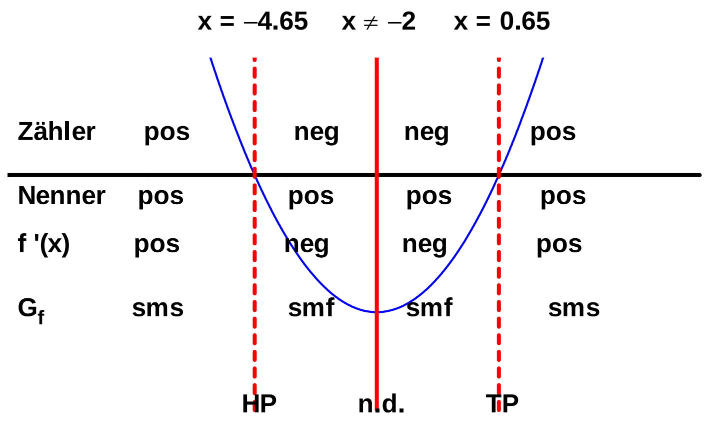
Betimmen Sie Art und Lage der Extrempunkte von G_f. Geben Sie deren Koordinaten auf zwei Dezimalstellen gerundet an.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) := \dfrac{x^2 + 4\cdot x - 3}{2\cdot(x+2)^2}$]

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{7\cdot 2}{(2\cdot x + 4)^2} = \frac{(2\cdot x + 4)^2 - 28}{2\cdot(2\cdot x + 4)^2} = \frac{4\cdot\left(x^2 + 4\cdot x + 4 - 7\right)}{2\cdot 4\cdot(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4\cdot x - 3}{2\cdot(x+2)^2}$$

Horizontale Tangenten:

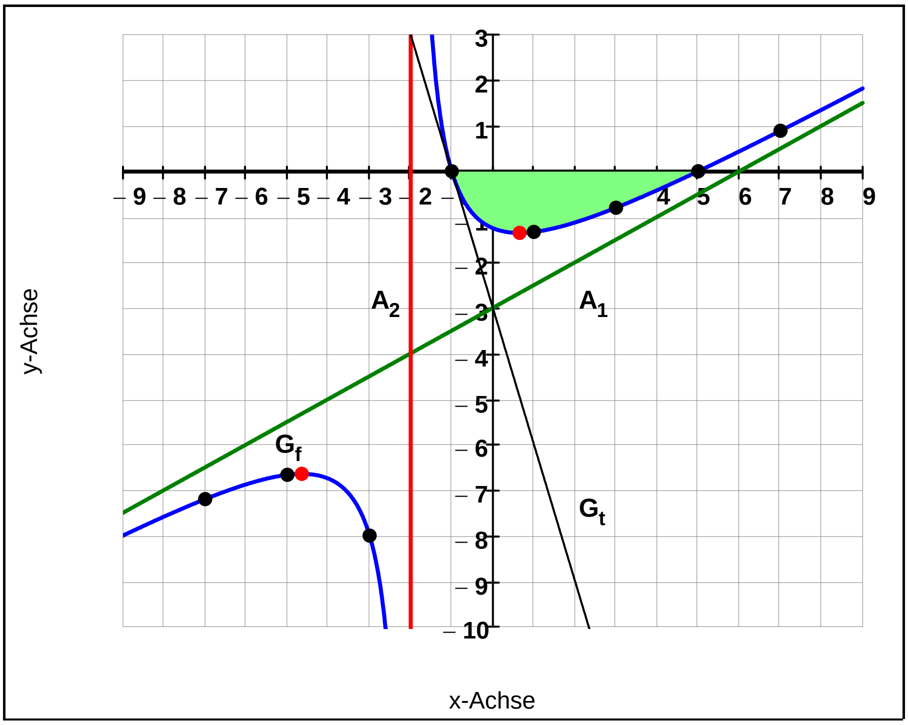
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4\cdot x - 3 = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} \sqrt{7} - 2 \\ -\sqrt{7} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.65 \\ -4.65 \end{pmatrix}$$



$f(-4.65) = -6.65$	rel. Hochpunkt:	**H (–4.65 | –6.65)**
$f(0.65) = -1.35$	rel. Tiefpunkt:	**T (0.65 | –1.35)**

Teilaufgabe 1.4 **(5 BE)**
Zeichnen Sie G_f und seine Asymptoten unter Verwendung bisheriger Ergebnisse für $-8 \le x \le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

$x_d := -7, -5 .. 7$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-7	-7.2
-5	-6.7
-3	-8
-1	0
1	-1.3
3	-0.8
5	0
7	0.9

Teilaufgabe 1.5 **(6 BE)**
G_f schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses in der Zeichnung von Teilaufgabe 1.4 und zeigen Sie, dass die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts $12 - 3.5 \cdot \ln(7)$ beträgt.

$$A = -\int_{-1}^{5} f(x)\, dx$$

Stammfunktion:

$$F(x) := \int \left(\frac{1}{2} \cdot x - 3 + \frac{7}{2 \cdot x + 4} \right) dx = \frac{7 \cdot \ln(x+2)}{2} - 3 \cdot x + \frac{x^2}{4}$$

$$F(5) \rightarrow \frac{7 \cdot \ln(7)}{2} - \frac{35}{4} \qquad F(-1) \rightarrow \frac{13}{4}$$

$$A := -(F(5) - F(-1)) \qquad A = 12 - \frac{7 \cdot \ln(7)}{2}$$

Teilaufgabe 1.6 (6 BE)
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f bei $x = -1$, zeichnen Sie diese in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1.4 ein und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das die Tangente mit der schiefen Asymptote von G_f und der x-Achse einschließt.

$f(-1) = 0 \qquad f'(-1) = -3$

Tangente im Punkt $P(\,-1 \mid 0\,)$

$t(x) := f'(-1)\cdot(x+1) = -3\cdot x - 3$

$$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot g\cdot h = \frac{1}{2}\cdot[6-(-1)]\cdot 3 = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 3 = \frac{21}{2}$$

Teilaufgabe 2.0
In einem abgeschiedenen Dorf verbreitet der Bewohner Maxl zum Zeitpunkt $t = 0$ das Gerücht, dass der berühmte Sänger Fritzi Vordergucker seinen Urlaub hier im Ort verbringen möchte.
Die Funktion B beschreibt näherungsweise die Anzahl der Dorfbewohner, die nach t Tagen von dem Gerücht gehört haben, und ist durch die Funktionsgleichung $B(t) = \dfrac{A}{1 + 849\cdot e^{c\cdot t}}$ mit $t \geq 0$ und $A, c \in IR$ festgelegt.
Bei den Rechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ihre Ergebnisse sinnvoll.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Ermitteln Sie die Parameter A und c, wenn nach 5 Tagen bereits 120 Dorfbewohner von dem Gerücht erfahren haben und am Anfang nur Maxl Bescheid wusste.
[Ergebnis: $A = 850$; $c = -0.988$]

$$B(0) = 1 \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{1 + 849\cdot e^{0}} = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{A}{850} = 1 \qquad A = 850$$

$$B(5) = 120 \quad\Rightarrow\quad \frac{A}{1 + 849\cdot e^{c\cdot 5}} = 120 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{850}{1 + 849\cdot e^{c\cdot 5}} = 120$$

Umformungen: $\dfrac{850}{120} = 1 + 849\cdot e^{5\cdot c} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{85}{12} - 1 = 849\cdot e^{5\cdot c}$

$$\frac{73}{12\cdot 849} = e^{5\cdot c} \qquad c := \frac{1}{5}\cdot\ln\left(\frac{73}{12\cdot 849}\right) \qquad c = -0.988$$

Teilaufgabe 2.2 (3 BE)
Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen bereits 500 Bewohner von dem Gerücht gehört haben.

$$B(t) := \frac{850}{1 + 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}}$$

$$N(t) = 500 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{850}{1 + 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}} = 500 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{850}{500} - 1 = 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}$$

$$\frac{350}{500 \cdot 849} = e^{-0.988 \cdot t} \qquad t_0 := \frac{-1}{0.988} \cdot \ln\left(\frac{350}{500 \cdot 849}\right) \qquad t_0 = 7.19$$

Teilaufgabe 2.3 (2 BE)
Bestimmen Sie $\lim_{t \to \infty} B(t)$ und erklären Sie die Bedeutung dieses Grenzwertes im Sachzusammenhang.

$$\lim_{t \to \infty} \frac{850}{1 + 849 \cdot \underbrace{e^{-0.988 \cdot t}}_{\downarrow \atop 0}} \to 850.0$$

Das Dorf hat nur 850 Einwohner, am Ende wissen es alle.

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion B.
Bestimmen Sie ferner das Verhalten der 1. Ableitungsfunktion von B für $t \to \infty$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
[Teilergebnis: $B'(t) = \dfrac{712990.2 \cdot e^{-0.988 \cdot t}}{\left(1 + 849 \cdot e^{-09.88 \cdot t}\right)^2}$

$$B(t) = \frac{850}{1 + 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}}$$

$$B'(t) = \frac{-850 \cdot 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t} \cdot (-0.988)}{\left(1 + 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}\right)^2} = \frac{712990.2 \cdot e^{-0.988 \cdot t}}{\left(1 + 849 \cdot e^{-0.988 \cdot t}\right)^2}$$

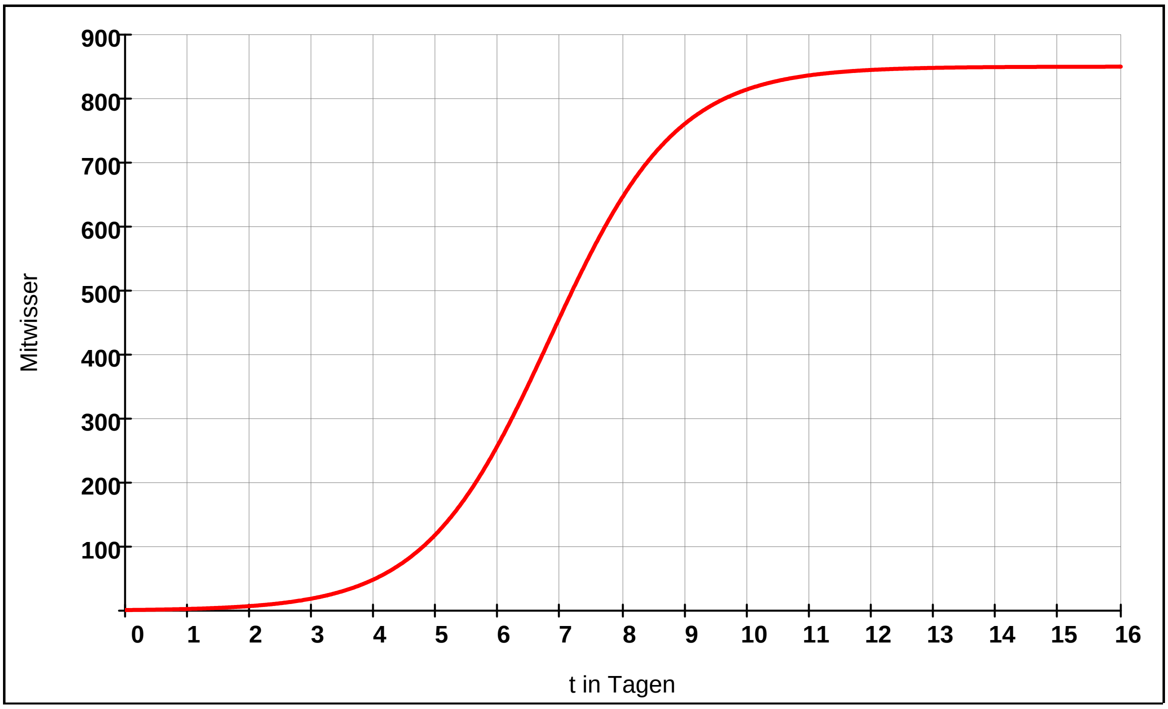
$712990.2 \cdot e^{-0.988 \cdot t} > 0$ für alle t $\Rightarrow$ $B'(t)$ besitzt keine Nullstellen.

Nenner immer positiv. $\Rightarrow$ G_B ist streng monoton steigend.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\overset{\overset{0}{\uparrow}}{712990.2\cdot e^{-0.988\cdot t}}}{\underset{\underset{0}{\downarrow}}{\left(1+849\cdot e^{-09.88\cdot t}\right)^{2}}} \rightarrow 0.0$$

Am Ende nimmt die Zahl der *Wissenden* nicht mehr weiter zu, es wissen alle Bescheid.

Teilaufgabe 2.5 **(4 BE)**
Zeichnen Sie für **t** $\in$ **[0 ; 16]** den Graphen von B in ein geeignetes Koordinatensystem.



Teilaufgabe 3.0
Zur Wiederaufforstung von steilen Gebirgshängen werden zunächst Baumsetzlinge gezüchtet und anschließend gepflanzt. Die Höhe h (in cm) eines Baumsetzlings in Abhängikeit von der Zeit t (in Monaten) wird durch folgende Funktion h näherungsweise beschrieben:

$\mathbf{h(t) = 70 + 30 \cdot \ln(3 \cdot t + 2)}$ für $\mathbf{t \in [\,0\,;\,240\,]}$

Die Pflanzung des Setzlings erfolgt zum Zeitpunkt $\mathbf{t = 0}$. Nach 240 Monaten ist das Höhenwachstum im Wesentlichen beendet. Auf die Verwendung von Einheiten kann bei der Rechnung verzichtet werden. Ergebnisse sind sinnvoll zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (2 BE)
Berechnen Sie die Höhe eines Setzlings zum Zeitpunkt der Anpflanzung und am Ende der Wachstumsphase.

$h(t) := 70 + 30 \cdot \ln(3 \cdot t + 2)$

$h(0) = 30 \cdot \ln(2) + 70 = 90.794$ gerundet: $h(0) = 91$

$h(240) = 30 \cdot \ln(722) + 70 = 267.461$ gerundet: $h(240) = 267$

Teilaufgabe 3.2 (3 BE)
Haben die Bäume eine Höhe von mindestens 250 cm erreicht, sind sie sicher mit dem Gebirgshang verwurzelt und können so einen Murenabgang nach sehr starken Regenfällen verhindern.
Berechnen Sie, wie viele Jahre es ab dem Beginn der Pflanzung dauert, bis ein Murenabgang auf Grund der Aufforstung erfolgreich abgewendet werden kann.

$h(t) = 250$

$70 + 30 \cdot \ln(3 \cdot t + 2) = 250 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3 \cdot t + 2) = \dfrac{250 - 70}{30} = 6 \qquad \dfrac{250 - 70}{30} \rightarrow 6$

$t_0 := \dfrac{1}{3} \cdot \left(e^6 - 2\right) \qquad t_0 = 133.8$

133.8 Monate entspricht 11,15 Jahre.

Es dauert ungefähr 11,2 Jahre, bis ein Murenabgang verhindert werden kann.

Teilaufgabe 3.3 **(4 BE)**
Zeigen Sie, dass die Baumsetzlinge für $t = 0$ am stärksten wachsen.

[Teilergebnis: $h'(t) = \dfrac{90}{3 \cdot t + 2}$]

Stärkstes Wachstum entpricht dem Extremum der 1. Ableitung.

$$h'(t) = \frac{30 \cdot 3}{3 \cdot t + 2} = \frac{90}{3 \cdot t + 2}$$

$$h''(t) = \frac{-90 \cdot 3}{(3 \cdot t + 2)^2} = \frac{-270}{(3 \cdot t + 2)^2} \qquad \Rightarrow \qquad h''(t) \text{ besitzt keine Nullstellen.}$$

Randextrema:

$$h'(0) = 45$$

$$\Rightarrow \qquad \text{größtes Wachstum zur Zeit } t = 0.$$

$$h'(240) = \frac{90}{3 \cdot 240 + 2} = 0.125$$

Graphische Darstellung in der Prüfung nicht verlangt.

$$t0 := 0, 0.01 .. 240$$