Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Die drei Bereiche R, S und T eines Betriebs sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell mit der Inputmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & a & 0 \\ a & 2 \cdot a & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0.05$ verflochten.

Teilaufgabe 1.1 (6 BE)
Berechnen Sie für $a = 0.2$ und einer Produktion von 100 ME im Bereich R, 120 ME im Bereich S und 150 ME im Bereich T die Marktabgaben der einzelnen Bereiche und zeichnen Sie das Verflechtungsdiagramm (Gozintograph).

Inputmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.2 & 0.6 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Marktvektor:

$$y := (E - A) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 120 \\ 150 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 66.0 \\ 7.0 \\ 54.0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 66 \\ 7 \\ 54 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

$$\text{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"R"} & \text{"S"} & \text{"T"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"U"} & 10 & 24 & 0 & 66 & 100 \\ \text{"V"} & 20 & 48 & 45 & 7 & 120 \\ \text{"W"} & 0 & 36 & 60 & 54 & 150 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)
Durch Modernisierungsmaßnahmen verändert sich a zu **a = 0.1**. Die drei Bereiche setzen nun folgende Mengen am Markt ab: Bereich R 140 ME, Bereich S 150 ME und Bereich T 180 ME.
Berechnen Sie die dazugehörigen Produktmengen.

Inputmatrix:

$$A := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Marktvektor:

$$y := \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)\cdot\vec{x} = \vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad (E - A)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 150 \\ 180 \end{pmatrix}$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & 0 \\ -0.1 & 0.8 & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & 0 & 140 \\ -0.1 & 0.8 & -0.3 & 150 \\ 0 & -0.3 & 0.6 & 180 \end{pmatrix} \xrightarrow{9\cdot(II) + (I)} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & 0 & 140 \\ 0 & 7.1 & -2.7 & 1490 \\ 0 & -0.3 & 0.6 & 180 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{7.1\cdot(III) + 0.3\cdot(II)} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.1 & 0 & 140 \\ 0 & 7.1 & -2.7 & 1490 \\ 0 & 0 & 3.45 & 1725 \end{pmatrix}$$

$$x_3 := \frac{1725}{3.45} = 500$$

$$x_2 := \frac{1}{7.1}\cdot(1490 + 2.7\cdot 500) = 400$$

$$x_1 := \frac{1}{0.9}\cdot(140 + 0.1\cdot 400) = 200$$

$\Rightarrow$ Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 200 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.3 (6 BE)
Bei einer überschlägigen Rechnung zur Gewinnoptimierung mit variablem a nimmt der Betriebsinhaber folgende Werte an: die Bereiche R und S produzieren je 120 ME und der Bereich T 140 ME. Je verkaufte Mengeneinheit beträgt der Gewinn im Bereich R 15,- € und in den Bereichen S und T je 10,- €. Berechnen Sie, für welchen Wert von a die Gewinnsumme maximal wird.

Inputmatrix:

$$A(a) := \begin{pmatrix} 0.1 & a & 0 \\ a & 2\cdot a & 0.3 \\ 0 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor:

$$x := \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ 140 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E - A)\cdot\vec{x} = \vec{y} \quad \Leftrightarrow$$

$$E - A(a) = \begin{pmatrix} 0.9 & -a & 0 \\ -a & 1 - 2\cdot a & -0.3 \\ 0 & -0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \qquad (E - A(a))\cdot x = \begin{pmatrix} 108.0 - 120\cdot a \\ 78.0 - 360\cdot a \\ 48.0 \end{pmatrix}$$

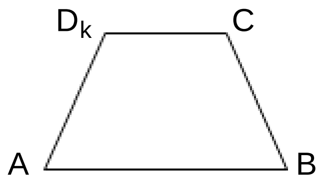
$$G(a) := (108 - 120\cdot a)\cdot 15 + (78 - 360\cdot a)\cdot 10 + 48\cdot 10$$

$$G(a) = 2880 - 5400\cdot a$$

Der Graph von G(a) ist eine fallende Gerade $\Rightarrow$ maximaler Wert am linken Rand von ID_a = [0,5 ; ∞ [
$\Rightarrow$ maximale Gewinnsumme für **a = 0.05** .

Teilaufgabe 2.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind die Punkte **A(2 | 1 | 0)**, **B(-4 | 3 | 2)**, **C(-2 | 2 | 2)** und die Punktmenge **D_k(k | 2k |-1)** mit **k** $\in$ **IR** sowie die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit r $\in$ **IR** gegeben.

Teilaufgabe 2.1 **(5 BE)**
Überprüfen Sie, ob es ein **k** $\in$ **IR** gibt, so dass die Punkte A, B, C und D_k die Eckpunkte des abgebildeten Trapezes sein können.



$\overrightarrow{AB}$ parallel $\overrightarrow{D_k C}$?

$$\lambda \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{D_k C} \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-k \\ 2-2\cdot k \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $\quad -6\cdot\lambda = -2 - k$

(2) $\quad 2\cdot\lambda = 2 - 2\cdot k$

(3) $\quad 2\cdot\lambda = 3 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{3}{2}$

in (2) $\quad 2\cdot\frac{3}{2} = 2 - 2\cdot k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-1}{2}$

Widerspruch

in (1) $\quad -6\cdot\frac{3}{2} = -2 - k \quad \Rightarrow \quad k = 7$

Die Punkte können nicht Eckpunkte des abgebildeten Trapezes sein.

Teilaufgabe 2.2 **(4 BE)**
Die drei Punkte A, B und C spannen die Ebene E auf. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebene E in Parameter- und Koordinatenform.
[Mögliches Teilergebnis: E: $x_1 + 2\cdot x_2 + x_3 - 4 = 0$]

Parameterform:

$$\overrightarrow{x_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda , \mu \in IR$$

$$\begin{pmatrix} -6 & -4 & x_1 - 2 \\ 2 & 1 & x_2 - 1 \\ 2 & 2 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[3\cdot(III) + (I)]{3\cdot(II) + (I)} \begin{pmatrix} -6 & -4 & x_1 - 2 \\ 0 & -1 & x_1 + 3\cdot x_2 - 5 \\ 0 & 2 & x_1 + 3\cdot x_3 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(III)+2\cdot(II)]{\qquad} \left(\begin{array}{ccc} -6 & -4 & x_1-2 \\ 0 & -1 & x_1+3\cdot x_2-5 \\ 0 & 0 & 3\cdot x_1+6\cdot x_2+3\cdot x_3-12 \end{array}\right)$$

Koordinatenform:

$$3\cdot x_1+6\cdot x_2+3\cdot x_3-12=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1+2\cdot x_2+x_3-4=0$$

Teilaufgabe 2.3 **(3 BE)**
Prüfen Sie durch Rechnung, ob es einen Wert für k gibt, für den ein Punkt der Punktmenge D_k sowohl in E als auch in g liegt.

$D_k \in g$:

$$\begin{pmatrix} k \\ 2\cdot k \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Komponenten:

(1) $\quad k=1+2\cdot r$

(2) $\quad 2\cdot k=r$

(3) $\quad -1=-2+r$

Aus (3): $\quad r=1$

In (2): $\quad k=\frac{1}{2}$

In (1): $\quad k=3$

Widerspruch, also $D_k \notin g$

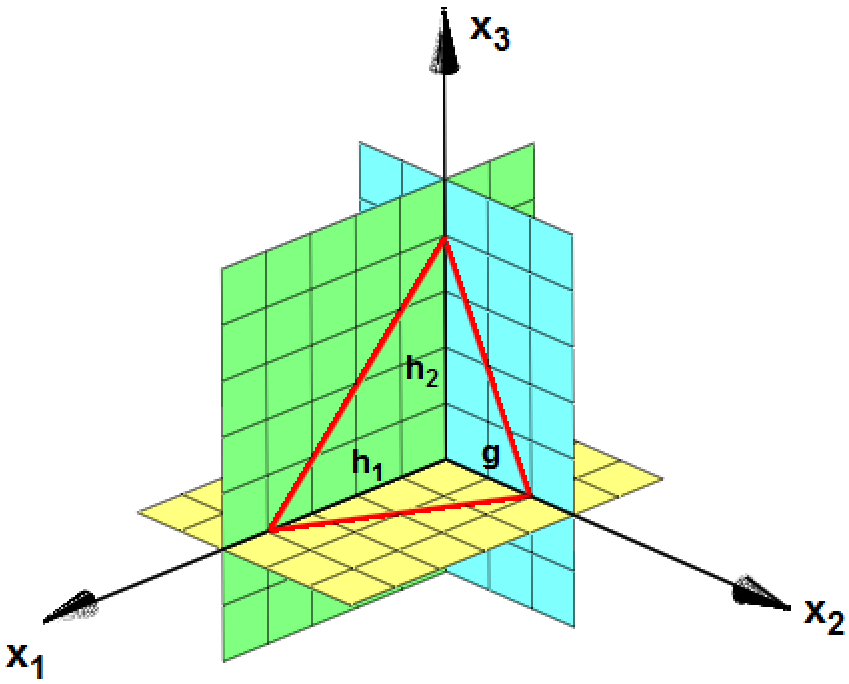
Teilaufgabe 2.4 **(4 BE)**
Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte der Ebene E und erstellen Sie eine Schrägbildskizze der Ebene E im Koordinatensystem.

$$x_1+2\cdot x_2+x_3=4$$

Achsenabschnittsform:

$$\frac{x_1}{4}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{4}=1$$

Spurpunkte: $S_1(4|0|0)$ $S_2(0|2|0)$ $S_3(0|0|4)$



Teilaufgabe 2.5 (2 BE)
Die Ebene E schließt mit den Koordinatenebenen eine Pyramide ein. Berechnen Sie die Maßzahl des Pyramidenvolumens.

$$V = \frac{1}{3}\cdot G\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_1\right)\cdot h_2 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\right)\cdot 4 = \frac{16}{3}$$

Teilaufgabe 2.6 (4 BE)
Die Ebene E und die x_1-x_2-Koordinatenebene schneiden sich in der Geraden h.
Bestimmen Sie die gegenseitige Lage von g und h.

$$\vec{x}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

E $\cap$ x_1-x_2-Ebene: Gerade h durch S_1 und S_2.

Gerade h: $\vec{x}_h = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Gerade g: $\vec{x}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Richtungsvektoren parallel?

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} -4 &= 2 \cdot \mu & \Rightarrow \quad \mu &= -2 \\ 2 &= \mu & \Rightarrow \quad \mu &= -2 \end{aligned}$$

Widerspruch, also nicht parallel.

$g \cap h$:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tau \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gauß-Matrix:

$$\begin{array}{ccc} \tau & r & \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2\cdot(\mathrm{II}) + (\mathrm{I})} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{4\cdot(\mathrm{III}) - (\mathrm{II})} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3. Zeile folgt: $\quad 0 = -5 \quad$ Widerspruch

Die Geraden g und h sind windschief zueinander.