Abiturprüfung Berufliche Oberschule 2016

- **Mathematik 13 Nichttechnik - B II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
In einer Kleinstadt sind drei Handwerksbetriebe B, M und S untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verbunden.

Es gibt folgende Inputmatrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.04 \end{pmatrix}$.

Teilaufgabe 1.1 **(4 BE)**
Bestimmen Sie die vollständige Input-Output-Tabelle, wenn B 100 ME, M 60 ME und S 50 ME produzieren.

Inputmatrix:

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.05 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.1 & 0.04 \end{pmatrix}$$

Produktionsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix:

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

$$\mathbf{E} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & -0.1 & 0.96 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y} := (\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 63.0 \\ 44.0 \\ 37.0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

Marktvektor:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 66 \\ 44 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Berechnungen

$$\mathbf{Warenflussmatrix} = \begin{pmatrix} \text{"Verflechtung"} & \text{"B"} & \text{"M"} & \text{"S"} & \text{"y"} & \text{"x"} \\ \text{"B"} & 10 & 12 & 15 & 63 & 100 \\ \text{"M"} & 5 & 6 & 5 & 44 & 60 \\ \text{"s"} & 5 & 6 & 2 & 37 & 50 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Wegen eines technischen Defekts kann der Betrieb S nicht mehr an den Markt liefern. Der Betrieb B erhöht seine Marktabgabe auf 67,8 ME und der Betrieb B senkt seine Marktabgabe auf 40,4 ME. Berechnen Sie, wie viel die einzelnen Betriebe in diesem Fall produzieren.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & -0.1 & 0.96 \end{pmatrix}$$

neuer Marktvektor: $y = \begin{pmatrix} 67.8 \\ 40.4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(E - A)\cdot\vec{x} = \vec{y}$ $\Leftrightarrow$ Gauß-Matrix lösen

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 & 67.8 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 & 40.4 \\ -0.05 & -0.1 & 0.96 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[0.9\cdot(III) + 0.05\cdot(I)]{0.9\cdot(II) + 0.05\cdot(I)} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 & 67.8 \\ 0 & 0.8 & -0.105 & 39.75 \\ 0 & -0.1 & 0.849 & 3.39 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[0.8\cdot(III) + 0.1\cdot(II)]{} \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 & 67.8 \\ 0 & 0.8 & -0.105 & 39.75 \\ 0 & 0 & 0.6687 & 6.687 \end{pmatrix}$$

Lösungen berechnen:

$x_3 := \dfrac{6.687}{0.6687}$ $\qquad x_3 = 10$

$x_2 := \dfrac{1}{0.8}\cdot(39.75 + 0.105\cdot x_3)$ $\qquad x_2 = 51$

$x_1 := \dfrac{1}{0.9}\cdot(67.8 + 0.2\cdot x_2 + 0.3\cdot x_3)$ $\qquad x_1 = 90$

Produktionsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 90 \\ 51 \\ 10 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)

Im Rahmen einer Marktanalyse wird der Produktionsvektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 100 - t \\ 60 - 2 \cdot t \\ 50 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$ betrachtet. Bestimmen Sie die Marktabgaben der einzelnen Betriebe in Abhängigkeit von t und ermitteln Sie das Intervall der für t sinnvollen Werte. Berechnen Sie außerdem, für welchen Wert von t die Summe der Marktabgaben den Maximalwert annimmt, und bestimmen Sie diesen Maximalwert.

Gegeben:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & -0.1 & 0.96 \end{pmatrix}$$

neuer Produktionsvektor: $\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} 100 - t \\ 60 - 2 \cdot t \\ 50 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{y(t)} = (E - A) \cdot \overrightarrow{x(t)}$$

$$\begin{pmatrix} 0.9 & -0.2 & -0.3 \\ -0.05 & 0.9 & -0.1 \\ -0.05 & -0.1 & 0.96 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 - t \\ 60 - 2 \cdot t \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \cdot t + 63.0 \\ -1.75 \cdot t + 44.0 \\ 0.25 \cdot t + 37.0 \end{pmatrix}$$

Es muss gelten:

$$\begin{pmatrix} -0.5 \cdot t + 63 \geq 0 \\ -1.75 \cdot t + 44 \geq 0 \\ 0.25 \cdot t + 37 \geq 0 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, t \\ \text{annehmen}, t \geq 0 \end{array} \right. \rightarrow 0.0 \leq t \leq 25.142857142857142857$$

Sinnvolle Werte für t: $t \in [\,0\,;\,25.14\,]$

$s(t) := -0.5 \cdot t + 63 + (-1.75 \cdot t + 44) + (0.25 \cdot t + 37)$ $\qquad s(t) = 144.0 - 2.0 \cdot t$

Der Graph von s ist eine fallende Gerade, Maximalwert also für $t = 0$

Maximale Marktabgabe: $s(0) = 144$

Teilaufgabe 2.0
In einem kartesischen Koordinatensystem des IR^3 sind diePunkte **A(1 | 0 | 1)** und **B(1 | 1 | 0)**

sowie die Geraden $g_a : \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \overrightarrow{OB} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit **r, a, s** $\in$ **IR** gegeben.

Teilaufgabe 2.1 **(3 BE)**
Geben Sie die besondere Lage der Geraden g_a im Koordinatensystem in Abhängigkeit von a an.

a = 0 g_0 ist echt parallel zur x_2-Achse.

a beliebig: g_a ist echt parallel zur x_1x_2-Ebene.

Teilaufgabe 2.2 **(6 BE)**
Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden g_a und h in Abhängigkeit von a und geben Sie gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes P an.

Richtungsvektoren sind linear unabhängig, d.h. g_a nicht parallel zu h für alle a.

$$g_a \cap h: \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow[a \neq 0]{a \cdot (II) - (I)} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad \xrightarrow[2 \cdot (III) - (II)]{} \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & -2-a \end{pmatrix} \end{array}$$

a = −2 Die Geraden schneiden sich. **a ≠ 2 ∧ a ≠ 0** Geraden sind windschief.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad 2 \cdot s = -2 \quad \Rightarrow \quad s = -1$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P(-1 | 1 | 1)$$

$$a = 0 \qquad \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & s \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l} s = 0 \\ r = 1 \\ 0 = -1 \end{array}$$

Widerspruch, Geraden sind windschief.

Teilaufgabe 2.3.0
Für $\mathbf{a = -2}$ wird die Ebene E durch die Gerade $\mathbf{g_{-2}}$ und den Punkt B festgelegt, welcher nicht auf $\mathbf{g_{-2}}$ liegt (Nachweis nicht erforderlich!).

Teilaufgabe 2.3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie je eine Parameter- und eine Koordinatengleichung der Ebene E.
[Mögliches Ergebnis: $\mathbf{E:\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 = 0}$]

Gegeben: $\mathbf{g_{-2}:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ $\qquad \mathbf{\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

Parameterform: $\mathbf{\overrightarrow{x_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Umwandlung in Koordinatenform:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & x_1 - 1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot (II) + (I)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 2 & 2 \cdot x_2 + x_1 - 1 \\ 0 & -1 & x_3 - 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2 \cdot (III) + (II)} \begin{pmatrix} -2 & 0 & x_1 - 1 \\ 0 & 2 & 2 \cdot x_2 + x_1 - 1 \\ 0 & 0 & x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 \end{pmatrix}$$

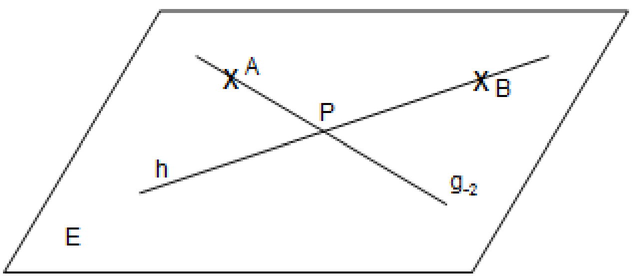
NR: $\mathbf{2 \cdot (x_3 - 1) + 2 \cdot x_2 + x_1 - 1 = x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3}$

Koordinatenform: $\mathbf{x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 - 3 = 0}$

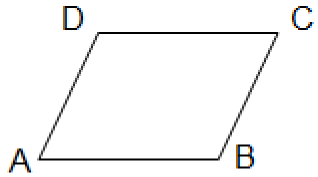
Teilaufgabe 2.3.2 (2 BE)
Zeigen Sie, dass die Gerade h in der Ebene E liegt.

$\mathbf{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$ in E: $\qquad \mathbf{1 + 2 \cdot s + 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-s) - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0}$

Teilaufgabe 2.3.3 (3 BE)
Fertigen Sie eine Skizze an, aus der die gegenseitige Lage der Ebene E, der Geraden $\mathbf{g_{-2}}$ und h sowie der Punkte A, B und P erkennbar ist. Verwenden Sie kein Koordinatensystem.



Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Die Punkte A, B, C(3 | 0 | 0) und D(d_1 | d_2 | d_3) bilden ein Parallelogramm (siehe Skizze).
Bestimmen Sie die Koordinaten von D und überprüfen Sie, ob das Parallelogramm ABCD in der Ebene E liegt.



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punkt D: **D(3 | −1 | 1)**

C in E: $3 + 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 - 3 = 0$

$\Rightarrow$ Parallogramm ABCD liegt in der Ebene E.