Gebrochenrationale Funktionen 11 - Lösung

- Kurvendiskussion
- Polstellen
- Schiefe Asymptote
- Keine Extrempunkte

ORIGIN := **1**

Aufgabe 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \dfrac{x^2+4}{2\cdot x}$, $x \in D$.

a) Bestimmen Sie die Definitionsmenge.
b) Untersuchen Sie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs.
Geben Sie die Art der Definitionslücke und alle Asymptoten an.
c) Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaft des Graphen von f.
d) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle an.
e) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Krümmungsintervalle an.
f) Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe aller bisherigen Ergebnisse.
Beschreiben Sie die Eigenschaften der Äste des Graphen von f mit Worten.

Teilaufgabe a)

Nenner auslesen: $n(x) := \mathbf{denom}(f(x)) = 2\cdot x$

Nullstellen des Nenners: $n(x) = 0 \rightarrow 2\cdot x = 0$ **auflösen**, $x \rightarrow 0$

Definitionsmenge: $D = IR \setminus \{0\}$

Teilaufgabe b)

Linksseitige Annäherung an $x_0 := 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+4}{2\cdot x} \rightarrow -\infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 := 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+4}{2\cdot x} \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist Polstelle 1. Ordnung.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+4}{2\cdot x} \rightarrow -\infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4}{2\cdot x} \rightarrow \infty$$

Bestimmung der schiefen Asymptote durch Polynomdivision mit Rest:

$f(x)$ **parfrac** $\rightarrow \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ $\qquad\Rightarrow\qquad$ $g(x) := \dfrac{x}{2}$

Teilaufgabe c)

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2 \cdot x} \qquad -f(x) = -\frac{x^2 + 4}{2 \cdot x}$$

$$f(-x) = -\frac{x^2 + 4}{2 \cdot x} \qquad \Rightarrow \qquad f(-x) = -f(x)$$

also ist G_f punktsymmetrisch zum Ursprung.

Teilaufgabe d)

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) = 1 - \frac{x^2 + 4}{2 \cdot x^2} = \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot x^2}$$

Zähler abrufen:

Horizontale Tangenten: $f'(x) = 0 \rightarrow \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot x^2} = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Graphische Lösung:

		$x = -2$		$x \neq 0$		$x = 2$	
Zähler	**pos**		**neg**		**neg**		**pos**
Nenner	**pos**		**pos**		**pos**		**pos**
f '(x)	**pos**		**neg**		**neg**		**pos**
G_f	**sms**		**smf**		**smf**		**sms**
		HP		**Polstelle**		**TP**	

Hochpunkt:

$f(-2) = -2 \qquad HP(-2, -2)$

Tiefpunkt:

$f(2) = 2 \qquad TP(2, 2)$

Mathcad-Lösung:

$$f'(x) \geq 0 \rightarrow \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot x^2} \geq 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2 \leq x \vee x \leq -2$$

$$f'(x) \leq 0 \rightarrow \frac{(x-2) \cdot (x+2)}{2 \cdot x^2} \leq 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow -2 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 2$$

Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton steigend in **] −∞ ; −2]** und G_f ist streng monoton fallend in **[2 ; 0 [**

$\Rightarrow x_{E1} := -2$ ist Maximalstelle, **HP**$(-2 / -2)$.

G_f ist streng monoton fallend in **] 0 ; 2]** und G_f ist streng monoton steigend in **[2 ; ∞ [**

$\Rightarrow x_{E2} := 2$ ist Minimalstelle, **TP**$(2 / 2)$.

Teilaufgabe e)

$$f''(x) := \frac{d}{dx}f'(x) = \frac{x-2}{2\cdot x^2} + \frac{x+2}{2\cdot x^2} - \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^3} = \frac{4}{x^3}$$

Graphische Lösung:

$x \neq 0$

Zähler	**pos**	**pos**
Nenner	**neg**	**pos**
f ''(x)	**neg**	**pos**
G_f	**rk**	**lk**

Polstelle

Mathcad-Lösung:

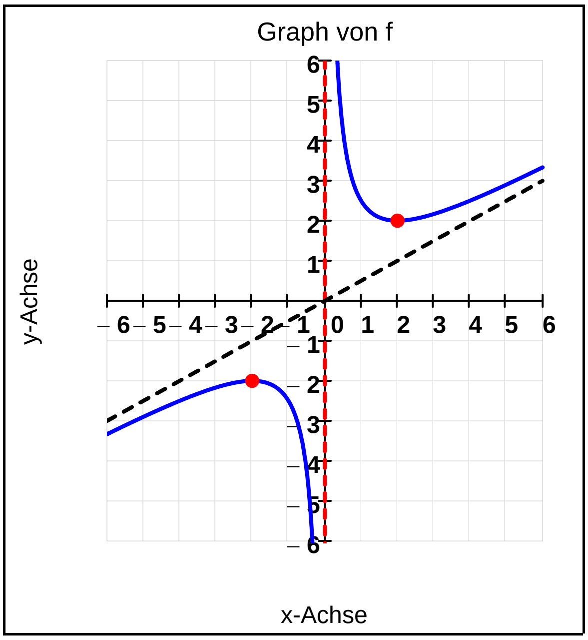
$$f''(x) \geq 0 \rightarrow \frac{4}{x^3} \geq 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0 < x$$

$$f''(x) \leq 0 \rightarrow \frac{4}{x^3} \leq 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < 0$$

Maximale Krümmungsintervalle:

G_f ist rechtsgekrümmt in **] −∞ ; 0 [** und G_f ist linksgekrümmt in **] 0 ; ∞ [**.

Teilaufgabe e)



Der Graph von f für x < 0 (linker Ast)

- besitzt einen Hochpunkt an der Stelle x = -2,
- ist rechtsgekrümmt.

Der Graph von f ist für x >0 (rechter Ast)

- besitzt einen Tiefpunkt an der Stelle x = 2,
- ist linksgekrümmt.