Gebrochenrationale Funktionen 12 - Lösung

- Kurvendiskussion
- Polstelle
- Asymptotische Kurve
- Extrempunkt, Wendepunkt

ORIGIN $:= 1$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) := \frac{x^3 - 8}{4 \cdot x}$, $x \in D$.

a) Geben Sie die Definitionsmenge an und bestimmen Sie die Nullstelle.
b) Untersuchen Sie das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereichs.
Geben Sie die Art der Definitionslücke und die asymptotische Kurve k an.
c) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Monotonieintervalle an und die auf eine Nachkommastelle gerundeten Koordinaten des Extrempunktes.
d) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten (graphische Lösung und Lösung mit CAS).
Geben Sie die maximalen Krümmungsintervalle an.
e) Zeichnen Sie den Graphen von f mithilfe aller bisherigen Ergebnisse.
Beschreiben Sie die Eigenschaften der Äste des Funktionsgraphen mit Worten.

Teilaufgabe a)

Definitionsmenge: $D = \mathrm{IR} \setminus \{ 0 \}$

Zähler abrufen: $z(x) := \mathrm{numer}(f(x)) \; = x^3 - 8$

Nullstellenbedingung: $z(x) = 0 \rightarrow x^3 - 8 = 0 \;\; \text{auflösen}, x \;\; \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{3} \cdot i \\ -1 - \sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix}$

reelle Lösung: $x_0 := z(x) = 0 \; \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x = \text{reell} \end{array} \right. \rightarrow 2$

Nullstelle: $x_0 = 2$

Teilaufgabe b)

Linksseitige Annäherung an $x_0 := 0$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^3 - 8}{x} \rightarrow \infty$$

Rechtsseitige Annäherung an $x_0 := 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 8}{x} \rightarrow -\infty$$

$\Rightarrow$ $x_0 = 0$ ist Polstelle 1. Ordnung.

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 8}{x} \to \infty \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 8}{x} \to \infty$$

Bestimmung der asymptotischen Kurve durch Polynomdivision mit Rest:

$$f(x) \text{ parfrac } = \frac{x^2}{2^2} - \frac{2}{x} \qquad \Rightarrow \qquad k(x) := \frac{x^2}{4}$$

Teilaufgabe c)

$$f'(x) := \frac{d}{dx} f(x) \to \frac{3 \cdot x}{4} - \frac{x^3 - 8}{4 \cdot x^2} \qquad f'(x) \text{ vereinfachen } \to \frac{x^3 + 4}{2 \cdot x^2}$$

Zähler abrufen: $z'(x) := \text{numer}(f'(x)) = x^3 + 4$

Horizontale Tangenten: $$x_E := z'(x) = 0 \text{ auflösen}, x = \begin{bmatrix} -4^{\frac{1}{3}} \\ \dfrac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \\ -\dfrac{4^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-1 + \sqrt{3} \cdot i\right)}{2} \end{bmatrix}$$

reelle Lösung: $$x_E := z'(x) = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x = \text{reell} \end{array} \right. = -4^{\frac{1}{3}}$$

Extremalstelle: $x_E = -4^{\frac{1}{3}} = -1.6$

Graphische Lösung:

		$x = -\sqrt[3]{4}$	$x \neq 0$
Zähler	neg	pos	pos
Nenner	pos	pos	pos
f '(x)	neg	pos	pos
G_f	smf	sms	sms
		TP	Polstelle

Tiefpunkt:

$$f(x_E) = \frac{3 \cdot 4^{\frac{2}{3}}}{4} = 1.9$$

$TP(-1.6, 1.9)$

Mathcad-Lösung:

$$f'(x) > 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{x^3 + 4}{2 \cdot x^2} > 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 0 < x \vee -2^{\frac{2}{3}} < x < 0$$

$$f'(x) < 0 \text{ vereinfachen } \rightarrow \frac{x^3 + 4}{2 \cdot x^2} < 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x < -2^{\frac{2}{3}}$$

Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton fallend in $] -\infty ; -\sqrt[3]{4}]$ und

G_f ist streng monoton steigend in $[-\sqrt[3]{4} ; 0 [$

G_f ist streng monoton steigend in $] 0 ; \infty [$.

$\Rightarrow x_E \rightarrow -4^{\frac{1}{3}} = -1.6$ ist Minimalstelle, $TP(-1.6 / 1.9)$.

Teilaufgabe d)

$$f''(x) := \frac{d}{dx} f'(x) \rightarrow \frac{x^3 - 8}{2 \cdot x^3} \qquad f''(x) = \frac{x^3 - 8}{2 \cdot x^3}$$

Nullst. 2. Abl.: $\quad f''(x) = 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{3} \cdot i \\ -1 - \sqrt{3} \cdot i \end{pmatrix}$

reelle Lösung: $\quad x_W := f''(x) = 0 \left| \begin{array}{l} \text{auflösen}, x \\ \text{annehmen}, x = \text{reell} \end{array} \right. \rightarrow 2$

Flachstelle: $\quad x_W = 2 \qquad y1 := -6 .. 6$

Graphische Lösung:

		$x \neq 0$		$x = 2$	
Zähler	**neg**		**neg**		**pos**
Nenner	**neg**		**pos**		**pos**
f ''(x)	**pos**		**neg**		**pos**
G_f	**lk**		**rk**		**lk**
		Polstelle		**WP**	

Mathcad-Lösung:

$$f''(x) > 0 \rightarrow \frac{x^3 - 8}{2 \cdot x^3} > 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow x < 0 \vee 2 < x$$

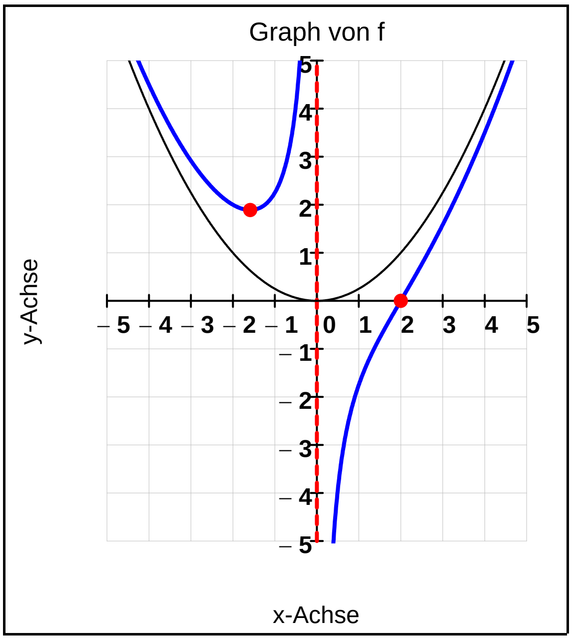
$$f''(x) < 0 \rightarrow \frac{x^3 - 8}{2 \cdot x^3} < 0 \text{ auflösen}, x \;\rightarrow 0 < x < 2$$

Maximale Krümmungsintervalle:

G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty\,;\,0[$,

G_f ist rechtsgekrümmt in $]\,0\,;\,2\,]$ und G_f ist linksgekrümmt in $[\,2\,;\,\infty\,[$, $x_W = 2$ ist Wendestelle.

Teilaufgabe e)



Der Graph von f für x < 0 (linker Ast)

- besitzt einen Tiefpunkt an der Stelle x = -1,9,
- ist linksgekrümmt.

Der Graph von f ist für x >0 (rechter Ast)

- besitzt einen Wendepunkt an der Stelle x = 2,
- Krümmungsverhalten wechselt von rechts-gekrümmt nach linksgekrümmt.