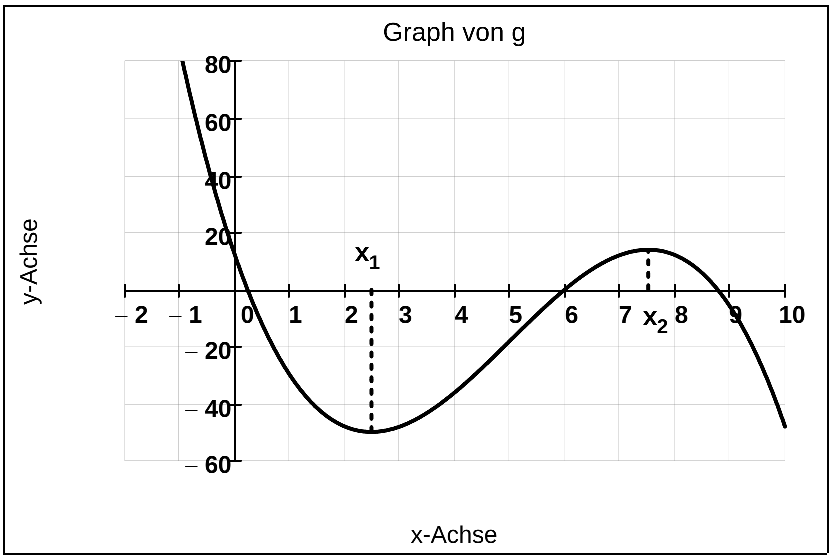
Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A I - Lösung**

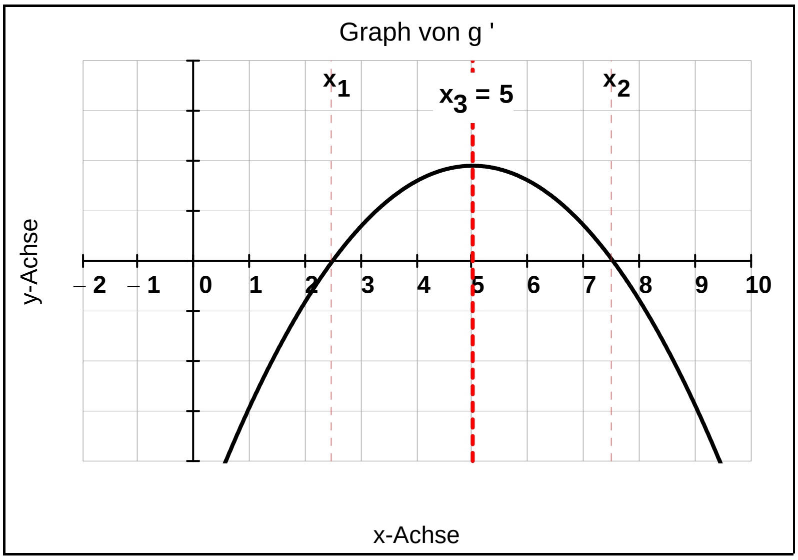
Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die ganzrationale Funktion g dritten Grades mit $D_g = IR$, deren Graph G_g in untenstehender Abbildung dargestellt ist. Vom Graphen sind folgende Eigenschaften bekannt:
G_g hat bei der Nullstelle $x = 6$ eine Tangente G_t mit $t\colon\ y = 16 \cdot x - 96$ mit $x \in IR$ und besitzt den Wendepunkt $W(\,5 \mid -18\,)$.



Teilaufgabe 1.1 (5 BE)

Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion von **g** in ein geeignetes Koordinatensystem und geben Sie die maximalen Monotonieintervalle der 1. Ableitungsfunktion **g '** an.



Der Graph von g ' ist eine nach unten geöffnete Parabel mit den Nullstellen x_1 und x_2.
Der Scheitel liegt bei $x = 5$.

Der Graph von g ' ist streng monoton steigend in $]\,-\infty\,;\ 5\,]$ und streng monoton fallend in $[\,5\,;\ \infty\,[$.

Teilaufgabe 1.2.0
Zur Bestimmung des Funktionsterms $g(x)$ ist folgendes Gleichungssystem gegeben:

(I) $216 \cdot a + 36 \cdot b + 6 \cdot c + d = 0$

(II) $125 \cdot a + 25 \cdot b + 5 \cdot c + d = -18$

(III) $108 \cdot a + 12 \cdot b + c = 16$

(IV) $30 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

Teilaufgabe 1.2.1 **(4 BE)**
Geben Sie nachvollziehbar an, welche Ansätze zu diesen Gleichungen führen.

$g(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$g'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

$g''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$

Nullstelle x = 6: $a \cdot 6^3 + b \cdot 6^2 + c \cdot 6 + d = 0$

$W \in G_g$: $a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = -18$

$g'(6) = 16$ $3 \cdot a \cdot 6^2 + 2 \cdot b \cdot 6 + c = 16$

$g''(5) = 0$ $6 \cdot a \cdot 5 + 2 \cdot b = 0$

Teilaufgabe 1.2.2 **(7 BE)**
Bestimmen Sie $g(x)$ mithilfe der Gleichungen aus 1.2.0.

(I) - (II) = (V) $91 \cdot a + 11 \cdot b + c = 18$

(III) $108 \cdot a + 12 \cdot b + c = 16$

(III) - (V) = (VI) $17 \cdot a + b = -2$

(IV) $30 \cdot a + 2 \cdot b = 0$

(IV) - 2 (VI) $-4 \cdot a = 4$ $\Rightarrow$ $a = -1$

a in (IV) $-17 + b = -2$ $\Rightarrow$ $b = 15$

a und b in (III) $-108 + 12 \cdot 15 + c = 16$ $\Rightarrow$ $c = -56$

a, b ,c in (I) $216 \cdot (-1) + 36 \cdot 15 + 6 \cdot (-56) + d = 0$ $\Rightarrow$ $d = 12$

Konkreter Funktionsterm: $g(x) = -x^3 + 15 \cdot x^2 - 56 \cdot x - 12$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben ist nun die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{10} \cdot g(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(-x^3 + 15 \cdot x^2 - 56 \cdot x + 12\right)$ mit $D_f = IR$, wobei g die Funktion aus Teilaufgabe 1.2.2 ist. Der Graph wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (7 BE)
Berechnen Sie alle Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -x^3 + 15 \cdot x^2 - 56 \cdot x - 12 = 0 \quad x_1 = 6$ aus 1.0 $\quad S_1\ (6 \mid 0)$

$$\left(-x^3 + 15 \cdot x^2 - 56 \cdot x + 12\right) \div (x - 6) = -x^2 + 9 \cdot x - 2$$

$$-\left(-x^3 + 6 \cdot x^2\right)$$

$$9 \cdot x^2 - 56 \cdot x$$

$$-\left(9 \cdot x^2 - 54 \cdot x\right)$$

$$-2 \cdot x + 12$$

$$-(-2 \cdot x + 12)$$

-- --

$$-x^2 + 9 \cdot x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{81 - 4 \cdot (-1) \cdot (-2)}}{-2} = \frac{-9 - \sqrt{73}}{-2} \qquad S_2\ \left(\frac{9 + \sqrt{73}}{2} \mid 0\right)$$

$$x_3 = \frac{-9 + \sqrt{73}}{-2} \qquad S_3\ \left(\frac{9 - \sqrt{73}}{2} \mid 0\right)$$

$f(0) = 12 \quad \Rightarrow \quad S_4\ (0 \mid 12)$

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)
Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Koordinaten auf eine Nachkommastelle

$$f'(x) = \frac{1}{10} \cdot \left(-3 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 56\right)$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 56 = 0$$

$$x_{e1} = \frac{-30 - \sqrt{900 - 4\cdot(-3)\cdot(-56)}}{-6} = 5 + \frac{\sqrt{57}}{3} \qquad x_{e1} = 7.5 \qquad f(7.5) = 1.4$$

$$x_{e1} = 5 - \frac{\sqrt{57}}{3} \qquad x_{e2} = 2.5 \qquad f(2.5) = -5$$

Extrempunkte: **HP(7.5| 1.4)** **TP(2.5| −5)**

Teilaufgabe 2.3 (4 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.

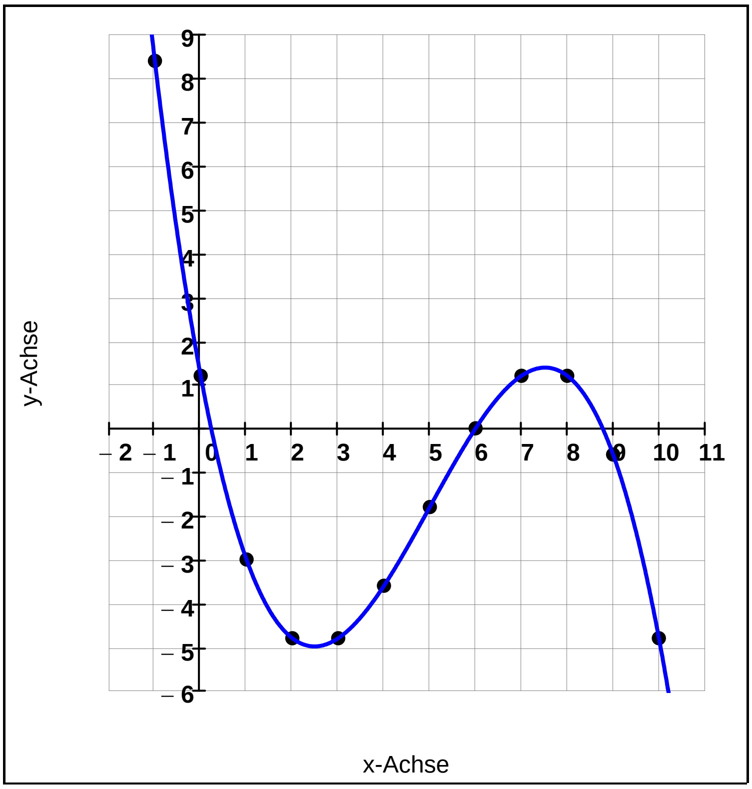
$$f''(x) = \frac{1}{10}\cdot(-6\cdot x + 30)$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -6\cdot x + 30 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_W = 5$$

Mithilfe der Zeichnung aus 1.0:

G_f ist linksgekrümmt für $]-\infty\,;\ 5\,]$ und rechtsgekrümmt für $[\ 5\,;\infty\ [$.

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)
Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Gaphen G_f im Bereich $-1 \le x \le 10$ in ein kartesisches Koordintensystem. Maßstab: $1\cdot LE = 1\cdot cm$.



x_d =	$f(x_d)$ =
-1	8.4
0	1.2
1	-3
2	-4.8
3	-4.8
4	-3.6
5	-1.8
6	0
7	1.2
8	1.2
9	-0.6
10	-4.8

Teilaufgabe 2.5 (2 BE)

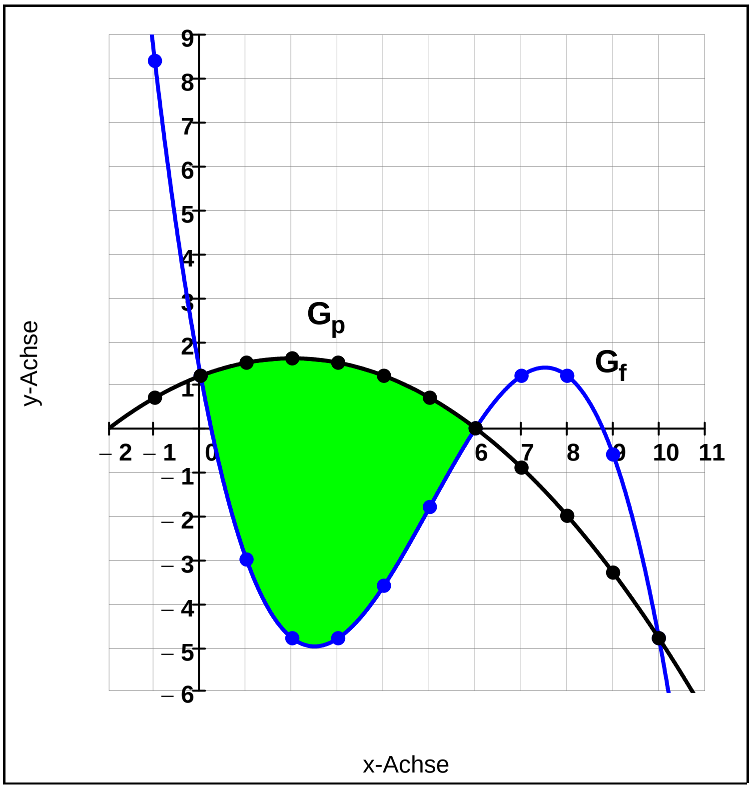
Es gilt $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx = 0$. Interpretieren Sie dieses Ergebnis in Bezug auf G_f.

Der Intergrationsbereich enthält die Nullstelle $x = \frac{9-\sqrt{73}}{2}$ mit Vorzeichenwechsel. Das heißt:

Das Flächenstück zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $-2 \le x \le \frac{9-\sqrt{73}}{2}$ ist genau so groß wie das Flächenstück zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $\frac{9-\sqrt{73}}{2} \le x \le 6$.

Teilaufgabe 2.6 (7 BE)

Die Parabel G_p mit $p(x) = -0.1\cdot x^2 + 0.4\cdot x + 1.2$ und $D_p = \mathbb{R}$ schließt mit G_f im I. und IV. Quadranten zwei endliche Flächenstücke ein.
Zeichnn Sie G_p für $-1 \le x \le 10$ in das vorhandene Koordinatensystem ein, schraffieren Sie das linke der beiden Flächenstücke und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts.
Die Integrationsgrenzen können der Zeichnung entnommen werden.



x_d =	$p(x_d)$ =
-1	0.7
0	1.2
1	1.5
2	1.6
3	1.5
4	1.2
5	0.7
6	0
7	-0.9
8	-2
9	-3.3
10	-4.8

$$A = \int_{0}^{6} (p(x) - f(x))\,dx$$

Differenzfunktion:

$$p(x) - f(x) = \frac{1}{10}\cdot\left(-x^2 + 4\cdot x + 12\right) - \frac{1}{10}\cdot\left(-x^3 + 15\cdot x^2 - 56\cdot x + 12\right)$$

$$d(x) = \frac{1}{10}\cdot\left(x^3 - 16\cdot x^2 + 60\cdot x\right)$$

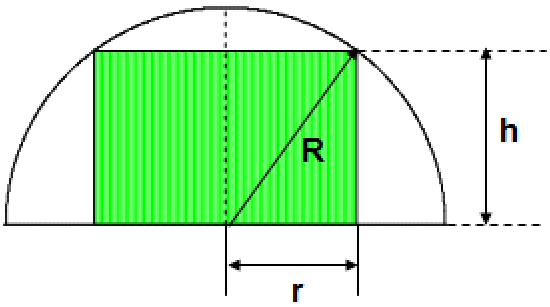
Stammfunktion:

$$D(x) := \frac{1}{10}\cdot\left(\frac{x^4}{4} - \frac{16\cdot x^3}{3} + \frac{60\cdot x^2}{2}\right) \qquad D(6) = 25.2 \qquad D(0) = 0$$

$$A = D(6) - D(0) = 25.2 \qquad A = 25.2$$

Teilaufgabe 3.0
Einer Halbkugel mit Radius $R = 10\cdot cm$ soll ein Zylinder mit Radius r und Höhe h einbeschrieben werden (siehe Skizze).

Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 3.1 (4 BE)
Ermitteln Sie die Maßzahl $V(h)$ des Volumens des Zylinders in Abhängigkeit von der Höhe h und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge für die Funktion **V: h $\mapsto$ V(h)** an, wenn die Höhe mindestens 6 cm betragen soll
[Mögliches Zwischenergebnis: $V(h) = h\cdot\pi\cdot\left(100 - h^2\right)$]

Zielfunktion: $V = r^2\cdot\pi\cdot h$

Nebenbedingung: $100 = h^2 + r^2 \quad\Leftrightarrow\quad r^2 = 100 - h^2$

Einsetzen in Zielfunktion: $V(h) = \left(100 - h^2\right)\cdot\pi\cdot h$

$$V(h) := \pi\cdot\left(100\cdot h - h^3\right)$$

Definitionsmenge: $D_V = [\,6 : 10\,[$

Teilaufgabe 3.2 (9 BE)
Berechnen Sie h so, dass V(h) den absolut größten Wert annimmt, und untersuchen Sie, ob das maximale Volumen V_{max} des Zylinders mehr als die Hälfte des Halbkugelvolumens beträgt.

$$V'(h) = \pi \cdot \left(100 - 3 \cdot h^2\right)$$

$$V'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 100 - 3 \cdot h^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{100}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad h_1 = -\sqrt{\frac{100}{3}} \text{ nicht def.} \qquad h_2 = \sqrt{\frac{100}{3}}$$

Vergleich mit den Randwerten: $V(6) = 1206.4$

$$\lim_{h \to 10^-} V(h) = 0$$

Funktionswert: $V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) = 1209.2$ absolut größter Wert.

Vergleich:

$$V_{max} := V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \qquad \text{Halbkugelvolumen:} \quad V_{Halbkugel} := \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 10^3$$

$$\frac{V_{max}}{V_{Halbkugel}} = 0.577 \quad \Rightarrow \quad V_{max} > \frac{1}{2} \cdot V_{Halbkugel}$$

Animation