Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Nichttechnik - A II - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0
Der Graph einer ganzrationalen Funktion f vierten Grades mit $D_f = IR$ ist symmetrisch zur y-Achse und hat einen Wendepunkt $W_1(1 \mid 2{,}5)$. Die Tangente G_t im Punkt W_1 besitzt die Gleichung
t: $y = 4 \cdot x - 1.5$ mit $x \in IR$.

Teilaufgabe 1.1 (7 BE)
Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x).
[Mögliches Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(x^4 - 6 \cdot x^2\right)$]

Allg. Funktionsterm: $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c$

1. Ableitung: $f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 2 \cdot b \cdot x$

2. Ableitung: $f''(x) = 12 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b$

$W \in G_f$: $f(1) = 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad a + b + c = \frac{5}{2}$ (1)

Wendepunkt: $f''(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 \cdot a + 2 \cdot b = 0$ (2)

Steigung: $f'(1) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot a + 2 \cdot b = 4$ (3)

(2) - (3): $8 \cdot a = -4 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1}{2}$

a in (3) $b = \frac{1}{2} \cdot \left[4 - 4 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\right] \quad \Rightarrow \quad b = 3$

a und b in (1) $c = \frac{5}{2} - \left(\frac{-1}{2}\right) - 3 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

Konkreter Funktionsterm: $\Rightarrow \quad f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^4 + 3 \cdot x^2$

Umgeformt: $f(x) := \frac{-1}{2} \cdot \left(x^4 - 6 \cdot x^2\right)$

Teilaufgabe 1.2 (5 BE)
Ermitteln Sie sämtliche Nullstellen der Funktion f und deren Vielfachheit. Erklären Sie die Bedeutung der Vielfachheit dieser Nullstellen für den Graphen G_f.

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 6 \cdot x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \cdot \left(x^2 - 6\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 0$ oder $x^2 - 6 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{12} = 0$ zweifache Nullstelle, Graph berührt die x-Achse.

$x_3 = -\sqrt{6}$ einfache Nullstelle, Graph schneidet die x-Achse.

$x_4 = \sqrt{6}$ einfache Nullstelle, Graph schneidet die x-Achse.

Teilaufgabe 1.3 (8 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f sowie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen G_f.

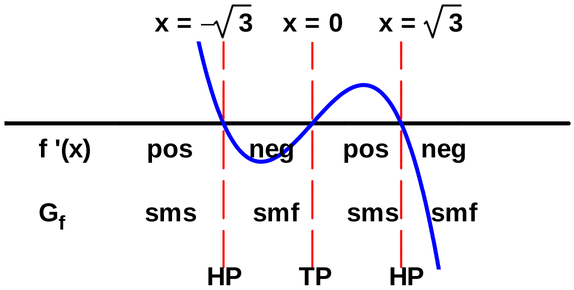
$$f'(x) = \frac{-1}{2} \cdot \left(4 \cdot x^3 - 12 \cdot x\right)$$

$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot x^3 - 12 \cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot x \cdot \left(x^2 - 3\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad x_{E1} = 0$ oder $x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad x_{E2} = -\sqrt{3}$

$x_{E3} = \sqrt{3}$



$f\left(-\sqrt{3}\right) = 4.5$ **H_1(- 1,7 | 4,5)**

$f(0) = 0$ **T(0 | 0)**

$f\left(\sqrt{3}\right) = 4.5$ **H_2(1,7 | 4,5)**

G_f ist streng mon. steigend für $x \in \left]-\infty\,;\,-\sqrt{3}\right]$ und für $x \in \left[0\,;\sqrt{3}\right]$.

G_f ist streng mon. fallend für $x \in \left]-\sqrt{3}\,;\,0\right]$ und für $x \in \left[\sqrt{3}\,;\infty\right[$.

Teilaufgabe 1.4 **(7 BE)**
Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph G_f genau zwei Wendepunkte besitzt und geben Sie die Koordinaten des zweiten Wendepunkts an. Berechnen Sie auch die x-Koordinaten sämtlicher Punkte von G_f, welche die gleichen y-Koordinaten wie die Wendepunkte haben.

Wegen der Symmetrie existiert ein zweiter Wendepunkt: **W_2(- 1 | 2,5)**

Ganzrationale Funktionen vierten Grades besitzen maximal zwei Wendepunkte, d. h. G_f hat genau zwei Wendepunkte.

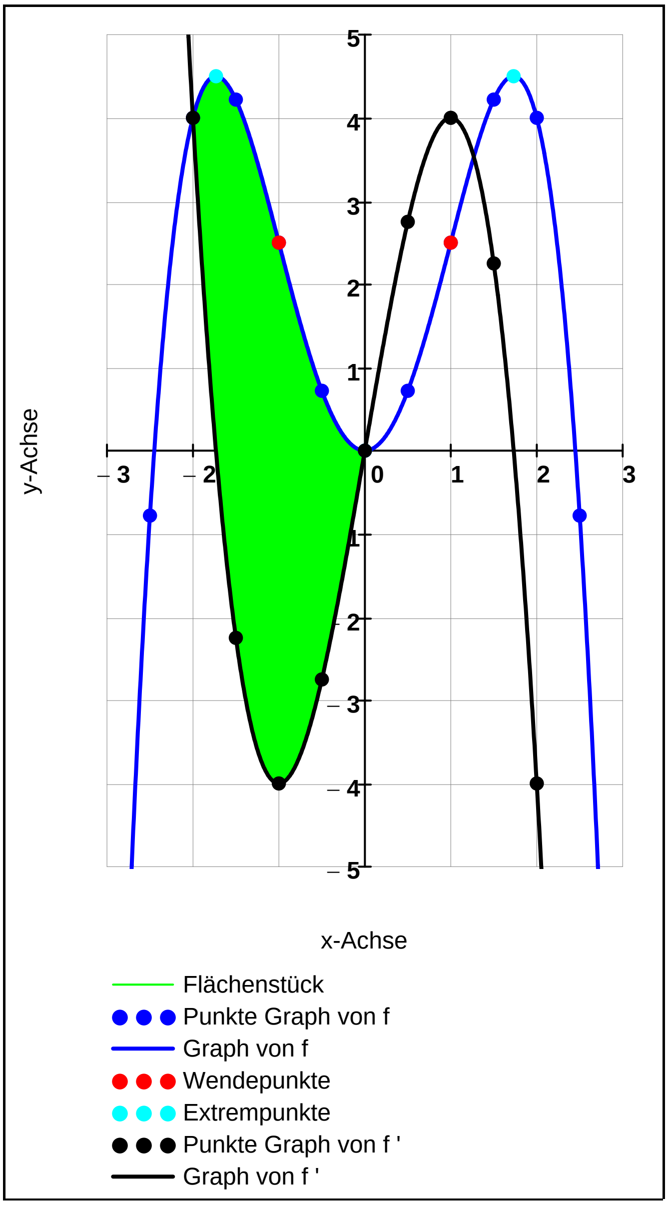
$$f(x) = 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\cdot\left(x^4 - 6\cdot x^2\right) = 2.5 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - 6\cdot x^2 + 5 = 0$$

Substitution: $x^2 = z \quad \Rightarrow \quad z^2 - 6\cdot z + 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (z-1)\cdot(z-5) = 0$

$z_1 = 1$ oder: $z_2 = 5$

Resubstitution: $x_1 = -1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad x_3 = -\sqrt{5}$ $\quad x_4 = \sqrt{5}$

Teilaufgabe 1.5 (5 BE)
Zeichnen Sie unter Mitverwendung vorliegender Ergebnisse den Graphen G_f im Bereich $-\mathbf{2.5} \le \mathbf{x} \le \mathbf{2.5}$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Für weitere Teilaufgaben wird auf der y-Achse der Bereich $-\mathbf{5} \le \mathbf{x} \le \mathbf{5}$ benötigt.
Maßstab: 1 LE = 1 cm.



$x_d =$	$f(x_d) =$
-2.5	-0.8
-2	4
-1.5	4.2
-1	2.5
-0.5	0.7
0	0
0.5	0.7
1	2.5
1.5	4.2
2	4
2.5	-0.8

$x_{d2} =$	$f'(x_{d2}) =$
-2	4
-1.5	-2.25
-1	-4
-0.5	-2.75
0	0
0.5	2.75
1	4
1.5	2.25
2	-4

Teilaufgabe 1.6 (7 BE)
Zeigen Sie, dass an der Stelle $x = -2$ die Geichung $f(x) - f'(x) = 0$ gilt und bestimmen Sie alle weiteren Stellen mit dieser Eigenschaft. Erklären Sie, was das Ergebnis für den Graphen G_f bedeutet.

zu zeigen: $f(-2) - f'(-2) = 0$

$$f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot\left[(-2)^4 - 6\cdot(-2)^2\right] = \frac{-1}{2}\cdot(16 - 24) = 4$$

$$f'(-2) = \frac{-1}{2}\cdot\left[4\cdot(-2)^3 - 12\cdot(-2)\right] = \frac{-1}{2}\cdot(-32 + 24) = 4$$

weitere Stellen: $\frac{-1}{2}\cdot\left(x^4 - 6\cdot x^2\right) - \left[\frac{-1}{2}\cdot\left(4\cdot x^3 - 12\cdot x\right)\right] = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \left(x^4 - 6\cdot x^2\right) - \left(4\cdot x^3 - 12\cdot x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^4 - 6\cdot x^2 - 4\cdot x^3 + 12\cdot x = 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x\cdot\left(x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x + 12\right) = 0$$

$x_1 = 0$ oder $x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x + 12 = 0$

$$\left(x^3 - 4\cdot x^2 - 6\cdot x + 12\right) \div (x + 2) = x^2 - 6\cdot x + 6$$

$$\begin{array}{l}
-\left(x^3 + 2\cdot x^2\right) \\
\hline
\quad -6\cdot x^2 - 6\cdot x \\
\quad -\left(-6\cdot x^2 - 12\cdot x\right) \\
\hline
\qquad 6\cdot x + 12 \\
\qquad -(6\cdot x + 12) \\
\hline
\qquad \text{--} \quad \text{--}
\end{array}$$

$$x^2 - 6\cdot x + 6 = 0$$

$$x_2 = \frac{6 - \sqrt{36 - 24}}{2} = \frac{6 - \sqrt{12}}{2} = \frac{6 - 2\cdot\sqrt{3}}{2}$$

$x_2 = 3 - \sqrt{3}$

$x_3 = 3 + \sqrt{3}$

An den Stellen $x = -2$, $x = 3 - \sqrt{3}$, $x = 3 + \sqrt{3}$ sind Steigung von G_f und y-Wert des Punkts gleich groß.

Oder: G_f und $G_{f'}$ schneiden sich an diesen Stellen.

Teilaufgabe 1.7 (4 BE)
Geben Sie exakt die Nullstellen und die Extremstellen der ersten Ableitungsfunktion f ' an und zeichnen Sie den Graphen $G_{f'}$ im Bereich $-2 \le x \le 2$ in das vorhandene Koordinatensystem mit Farbe ein.

Nullstellen von f ': $x_1 = -\sqrt{3}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{3}$ (vgl. 1.3)

Extremstellen von f ': $x_{e1} = -1$ $x_{e2} = 1$ (Wendestellen von f)

Teilaufgabe 1.8 (5 BE)
Die Graphen G_f und $G_{f'}$ schließen ein endliches Flächenstück ein, das im II. und III. Quadranten des Koordinatensystems liegt.
Markieren Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts.

Flächenmaßzahl:

$$A = \int_{-2}^{0} (f(x) - f'(x))\,dx$$

Stammfunktion

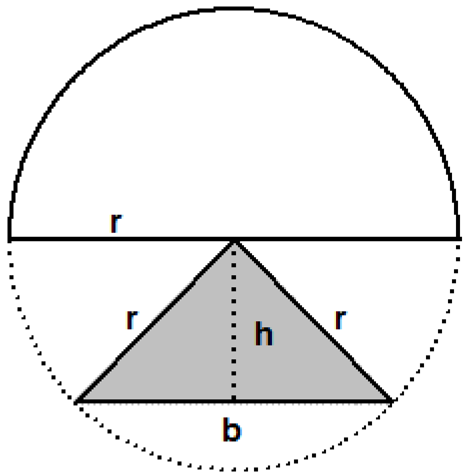
$$D(x) = \int (f(x) - f'(x))\,dx = \int \left(\frac{-1}{2}\cdot x^4 + 3\cdot x^2 + 2\cdot x^3 - 6\cdot x\right) dx = \frac{-1}{10}\cdot x^5 + x^3 + \frac{1}{2}\cdot x^4 - 3\cdot x^2 + c$$

$$A = D(0) - D(-2) = 0 - \left(\frac{-44}{5}\right) = \frac{44}{5} = 8.8$$

Teilaufgabe 2 (3 BE)
Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Ist der Graph G_h einer ganzrationalen Funktion h symmetrisch zur y-Achse, dann ist der Graph $G_{f'}$ der ersten Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Symmetrischer Funktionsterm enthält nur gerade Potenzen von x. Beim Ableiten entstehen nur ungerade Potenzen von x, der konstante Term fällt weg, also ist der Graph der Ableitungsfunktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Teilaufgabe 3.0
Ein Designstudio hat eine Nachttischleuchte entworfen. Diese besteht aus einem halbkugelförmigen Schirm mit Radius $r = 12 \cdot cm$ und einem Leuchtenfuß in der Form eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Durchmesser b in der Grundfläche (siehe nebenstehende Skizze).
Bei Berechnungen kann auf die Verwendung von Einheiten verzichtet werden.



Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Bestimmen Sie die Maßzahl $V(h)$ des Volumens des Fußes der Leuchte in Abhängigkeit von h.

[Mögliches Zwischenergebnis: $V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(-h^3 + 144 \cdot h\right)$]

Zielfunktion: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h$

Nebenbedingung: $r^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 12^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Auflösen: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 144 - h^2$

Einsetzen in Zielfunktion: $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \left(144 - h^2\right) \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \left(144 \cdot h - h^3\right) \cdot \pi$

$$V(h) := \frac{\pi}{3} \cdot \left(-h^3 + 144 \cdot h\right)$$

Teilaufgabe 3.2 (6 BE)
Aus technischen Gründen wird für die Funktion V mit **V: h ↦ V(h)** als Definitionsbereich $D_V = [2\,;\,8]$ gewählt.
Bestimmen Sie die Höhe h des Leuchtfußes so, dass die Maßzahl seines Volumens den absolut größten Wert annimmt. Nach Auffassung der Designer würde dann die Leuchte die ansprechendsten Proportionen besitzen.

$$V'(h) = \frac{\pi}{3}\cdot\left(-3\cdot h^2 + 144\right)$$

$V'(h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\cdot h^2 + 144 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h^2 = \frac{144}{3} = 48$

$\Leftrightarrow \quad h_1 = -\sqrt{48}$ nicht def. $\quad h_2 = \sqrt{48}$

Vergleich mit den Randwerten: $V(2) = 293.2$

$V(8) = 670.2$

Funktionswert: $V\left(\sqrt{48}\right) = 696.5$ absolut größter Wert bei $h_{max} = \sqrt{48}$

Animation