Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

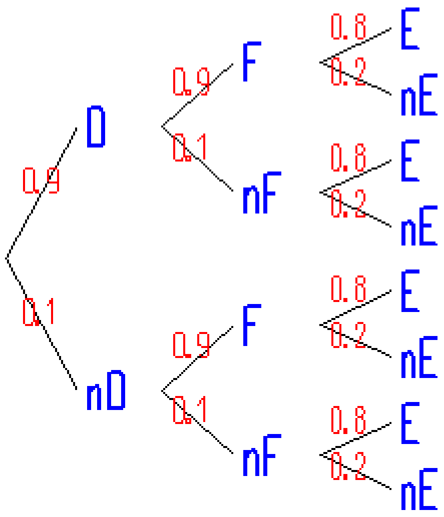
- **Mathematik 12 Nichttechnik - S I - Lösung**

Im Folgenden werden relative Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretiert.

Teilaufgabe 1.0
Vor einem Tennisturnier werden die verwendeten Tennisbälle hinsichtlich der Qualtität geprüft. Aus Erfahrung weiß man, dass 90% der Bälle den richtigen Durchmesser aufweisen $(\mathbf{D})$, 10% Fehler in der Form $(\overline{\mathbf{F}})$ sowie 20% Fehler in der Elastizität $(\overline{\mathbf{E}})$ zu beklagen sind. Alle Fehler treten unabhängig voneinander auf. Im Zufallsexperiment wird ein beliebig ausgewählter Ball auf die drei möglichen Fehler untersucht.

Teilaufgabe 1.1 (5 BE)
Bestimmen Sie unter Verwendung eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse dieses Zufallsexperiments.

Bezeichnung: $\overline{\mathbf{D}}$ **= nD** $\overline{\mathbf{F}}$ **= nF** $\overline{\mathbf{E}}$ **= nE**



$$p(D\ F\ E) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 0.648$$
$$p(D\ F\ nE) = 0.9 \cdot 0.9 \cdot 0.2 = 0.162$$
$$p(D\ nF\ E) = 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.8 = 0.072$$
$$p(D\ nF\ nE) = 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.018$$
$$p(nD\ F\ E) = 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.8 = 0.072$$
$$p(nD\ F\ nE) = 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.2 = 0.018$$
$$p(nD\ nF\ E) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.8 = 0.008$$
$$p(nD\ nF\ nE) = 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.2 = 0.002$$

Gesamtsumme = 1

Teilaufgabe 1.2.0
Gegeben seien folgende Ereignisse:
E_1: ***Der Ball weist genau zwei Fehler auf.***

$E_2 = \{ DFE, DF\overline{E}, \overline{D}FE, \overline{D}F\overline{E} \}$

Teilaufgabe 1.2.1 **(5 BE)**
Geben Sie E_1 in aufzählender Mengenschreibweise an und fassen Sie E_2 möglichst einfach in Worte. Prüfen Sie ferner E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit.

$E_1 = \{ D\overline{FE}, \overline{D}F\overline{E}, \overline{DF}E \}$ $\qquad P(E_1) = 0.018 + 0.018 + 0.08 = 0.44$

E_2: Es liegt kei Formfehler vor. $\qquad P(E_2) = 0.648 + 0.162 + 0.072 + 0.018 = 0.9$

$E_1 \cap E_2 = \{ DF\overline{E} \}$

i) $\qquad P(E_1 \cap E_2) = 0.018$

ii) $\qquad P(E_1) \cdot P(E_2) = 0.044 \cdot 0.9 = 0.0396$

$i \neq ii$ $\qquad$ E_1 und E_2 sind stochastisch abhängig

Teilaufgabe 1.2.2 **(2 BE)**
Geben Sie ein Ereignis E_3 an, für das gilt: $10 \cdot P(E_3) = P(E_2)$

$10 \cdot P(E_3) = P(E_2)$

$P(E_3) = \frac{1}{10} \cdot P(E_2) = \frac{1}{10} \cdot 0.9 = 0.09$

$E_3 = \{ D\overline{F}E, D\overline{FE} \}$ $\qquad P(E_3) = 0.072 + 0.018 = 0.09$

Teilaufgabe 2.0
Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Fehler eines Balls an. Es treten nur die drei in 1.0 genannten Fehler mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten auf.

Teilaufgabe 2.1 **(2 BE)**
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

$$\begin{pmatrix} X & 0 & 1 & 2 & 3 \\ W(X) & 0.648 & 0.306 & 0.044 & 0.002 \end{pmatrix}$$

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Zufallswerte um höchstens die einfache Standard-abweichung vom Erwartungswert abweichen.

$$E(X) = 0 \cdot 0.648 + 1 \cdot 0.306 + 2 \cdot 0.044 + 3 \cdot 0.002 = 0.400$$

$$Var(X) = 0^2 \cdot 0.648 + 1^2 \cdot 0.306 + 2^2 \cdot 0.044 + 3^2 \cdot 0.002 - 0.4^2 = 0.340$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.340} = 0.583$$

obere Grenze: $\mu + \sigma = 0.400 + 0.583 = 0.983$

untere Grenze: $\mu - \sigma = 0.400 - 0.583 = -0.183$

$$P(-0.183 \le X \le 0.98) = P(X = 0) = W(0) = 0.648$$

In den Teilaufgaben 3 und 4 habe das Ereignis ***fehlerfreier Ball*** die Wahrscheinlichkeit **p = 0.65**.

Teilaufgabe 3 (6 BE)
Einem vorrasbehälter werden der Reihe nach 15 Bälle mit Zurücklegen entnommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
E_4: ***Genau 5 Bälle sind fehlerfrei.***
E_5: ***Genau 7 Bälle sind fehlerfrei, aber nicht die ersten fünf.***
E_6: ***Mindestens 10 aber weniger als 14 Bälle sind fehlerfrei.***
E_7: ***Nur 2 entnommene Bälle sind fehlerhaft und diese folgen nacheinander.***

$$P(E_4) = P(k = 5) = B(15, 0.65, 5) = 0.009612$$

$$E_5 = \{ FFFFF\overline{FFFFFFF} \}$$

$$P(E_4) = 0.35^5 \cdot B(10, 0.65, 7) = 0.35^5 \cdot 0.2522 = 0.001325$$

$$P(E_6) = P(10 \le k < 14) = P(10 \le k \le 13) = \sum_{i=0}^{13} B(15, 0.65, i) - \sum_{i=0}^{9} B(15, 0.65, i)$$

$$P(E_6) = 0.98582 - 0.43572 = 0.5501$$

E_7:

FFxxxxxxxxxxxxx	xxxxxFFxxxxxxxx	xxxxxxxxxxFFxxx
xFFxxxxxxxxxxxx	xxxxxxFFxxxxxxx	xxxxxxxxxxxFFxx
xxFFxxxxxxxxxxx	xxxxxxxFFxxxxxx	xxxxxxxxxxxxFFx
xxxFFxxxxxxxxxx	xxxxxxxxFFxxxxx	xxxxxxxxxxxxxFF
xxxxFFxxxxxxxxx	xxxxxxxxxFFxxxx	

$$P(E_7) = 14 \cdot 0.35^2 \cdot 0.65^{13} = 0.00634$$

Teilaufgabe 4.0
Nach Anschaffung einer neuen Maschine behauptet der Herstelle, dass der Anteil fehlerhafter Bälle auf über 65% gestiegen ist (Gegenhypothese). Zur Überprüfung wird ein Signifikanztest mit 100 zufällig ausgewählten Bällen durchgeführt.

Teilaufgabe 4.1 (4 BE)
Sind mindestens 70 Bälle fehlerfrei, so geht man von einer verbesserten Maschine aus.
Geben Sie die Testgröße sowie die Nullhypothese an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art.

Testgröße: Anzahl der fehlerfreien Bälle unter $\mathbf{n = 100}$

Nullhypothese H_0: $p_0 \le 0.65$

Gegenhypothese H_1: $p_1 > 0.65$

Annahmebereich: $A = \{\ 0, 1, \ldots, 69\ \}$

Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{\ 70, 71, \ldots, 100\ \}$

$$\alpha = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{i=0}^{69} B(100, 0.65, i) = 1 - 0.82698 = 0.17302$$

Teilaufgabe 4.2 (4 BE)
Ermitteln Sie den maximalen Ablehnungsbereich der Nullhypothese auf dem 5%-Niveau.

$A = \{\ 0, 1, \ldots, k\ \}$

$\overline{A} = \{\ k+1, k+2, \ldots, 100\ \}$

$$P(\overline{A}) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - P(A) \le 0.05 \quad \Leftrightarrow \quad P(A) \ge 0.95$$

$$\sum_{i=0}^{k} B(100, 0.65, i) \ge 0.95 \quad \xrightarrow{\text{TW}} \quad 0.96486 \quad \Rightarrow \quad k = 73$$

$A = \{\ 0, 1, \ldots, 73\ \}$

$\overline{A} = \{\ 74, 75, \ldots, 100\ \}$

Teilaufgabe 5.0
Die Tennisfreunde Bernie Ball und Nobby Netz vereinbaren eine kleine Trainingseinheit von 4 Spielen. Bei jedem Spiel hat Bernie, die konstante Gewinnwahrscheinlichkeit $p > 0$.
Das Ereignis ***Bernie gewinnt genau einmal*** ist doppelt so wahrscheinlich wie das Ereignis ***Bernie gewinnt nie***.

Teilaufgabe 5.1 **(4 BE)**
Berechnen Sie hieraus p.
[Ergebnis: $p = \frac{1}{3}$]

Bernie gewinnt: {g} Wahrscheinlichkeit: $P(g) = p$

Bernie gewinnt in vier Spielen genau einmal:

$E_1 = \{ g\overline{ggg}, \overline{g}g\overline{gg}, \overline{gg}g\overline{g}, \overline{ggg}g \}$ $\qquad P(E_1) = 4 \cdot p \cdot q^3$

Bernie gewinnt nie:

$E_2 = \{ \overline{gggg} \}$ $\qquad P(E_2) = q^4$

Bedingung: $P(E_1) = 2 \cdot P(E_2)$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \cdot p \cdot q^3 = 2 \cdot q^4 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot p = q \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot p = 1 - p$$

$$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot p = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = \frac{1}{3}$$

Teilaufgabe 5.2 **(3 BE)**
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
E_8: ***Bernie gewinnt genau zweimal.***
E_9: ***Bernie gewninnt höchstens einmal.***

$$P(E_8) = P(k = 2) = B\left(4, \frac{1}{3}, 2\right) = 0.29630$$

$$P(E_9) = P(k \le 1) = \sum_{i=0}^{1} B\left(4, \frac{1}{3}, i\right) = 0.59259$$