Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung mit CAS**

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \dfrac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)
Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an.

Zählergrad gleich Nennergrad $\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = \dfrac{1}{0.25} = 4$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} \to 4 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} \to 4$$

Teilaufgabe 1.2 (3 BE)
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit seiner Asymptote.

CAS

$$f(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} = 4 \text{ auflösen}, x \to 0 \qquad x = 0$$

$f(0) = 4$ Schnittpunkt: **S (0 | 4)**

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)
Bestimmen Sie **ohne CAS** die Art und die Koordinaten aller Extrempunkte von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2}$]

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-2)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot x^2\right) - (x-2)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot x}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2} = (x-2)\cdot\frac{2+\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + x}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2} = \frac{(2+x)\cdot(x-2)}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2+x)\cdot(x-2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$$

	$x = -2$		$x = 2$	
Zähler	pos	neg	pos	
Nenner	pos	pos	pos	
f'(x)	pos	neg	pos	
G_f	sms	smf	sms	
		HP	TP	

$f(-2) = 8$

$f(2) = 0$

Hochpunkt: **H(−2 | 8)**

Tiefpunkt: **T(2 | 0)**

Teilaufgabe 1.4 (4 BE)
Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.

$$f'(x) := \frac{x^2 - 4}{\left(1 + \frac{1}{4}\cdot x^2\right)^2}$$

CAS

$$f''(x) := \frac{d^2}{dx^2}f(x) = \frac{2}{\frac{x^2}{4} + 1} - \frac{(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2} - \frac{x\cdot(2\cdot x - 4)}{\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2} + \frac{x^2\cdot(x-2)^2}{2\cdot\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^3}$$

CAS

$$f''(x) \text{ vereinfachen } = -\frac{32\cdot x\cdot\left(x^2 - 12\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

CAS

$$f''(x) \ge 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow x \le -2\cdot\sqrt{3} \vee 0 \le x \le 2\cdot\sqrt{3}$$

CAS

$$f''(x) \le 0 \text{ auflösen}, x \rightarrow 2\cdot\sqrt{3} \le x \vee -2\cdot\sqrt{3} \le x \le 0$$

G_f ist linksgekrümmt in $x \in \left]-\infty; -2\cdot\sqrt{3}\right]$,

G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in \left[-2\cdot\sqrt{3}; 0\right]$,

G_f ist linksgekrümmt in $x \in \left[0; 2\cdot\sqrt{3}\right]$,

G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in \left[2\cdot\sqrt{3}; \infty\right[$.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Geben Sie die Nullstelle von f sowie deren Vielfachheit an und zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graph von f sowie dessen Asymptote für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab: 1LE = 1 cm.

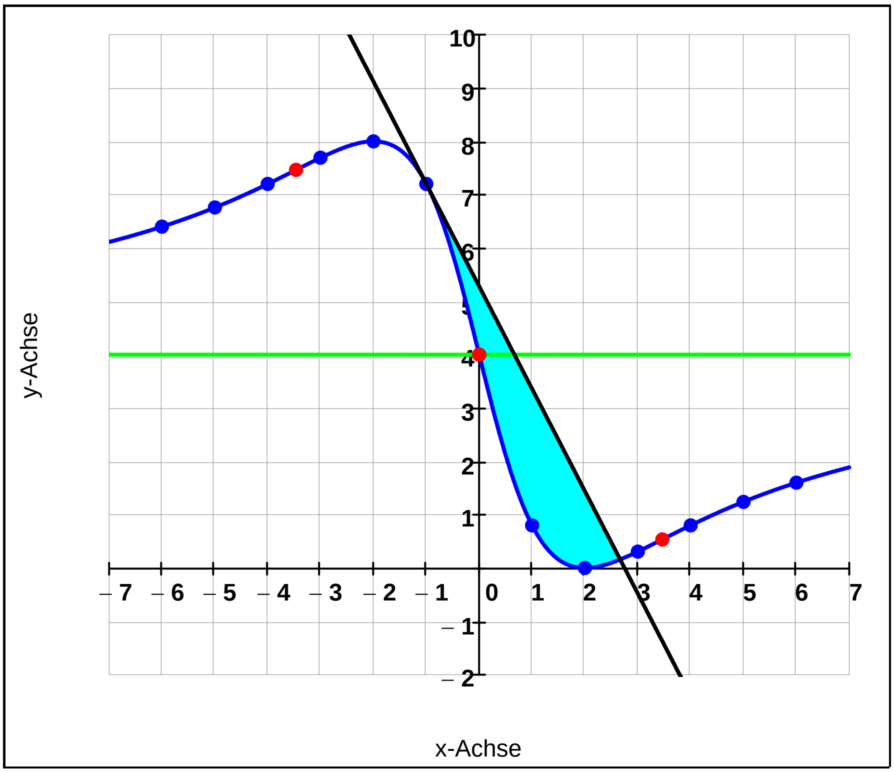
Nullstelle: $(x-2)^2 = 0$ $\quad x_{12} = 2$ $\quad$ zweifach, Graph berührt x-Achse.

Hochpunkt: $H(-2\,|\,8)$ $\quad$ Tiefpunkt: $T(2\,|\,0)$

Wendepunkte: $f\left(-2\cdot\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)^2}{4} = 7.5$ $\quad \sqrt{12} = 3.5$ $\quad W_1(-3.5\,|\,7.5)$

$f(0) = 4$ $\quad W_2(0\,|\,4)$

$f\left(2\cdot\sqrt{3}\right) = \dfrac{\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)^2}{4} = 0.5$ $\quad W_3(3.5\,|\,0.5)$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-6	6.4
-5	6.8
-4	7.2
-3	7.7
-2	8
-1	7.2
0	4
1	0.8
2	0
3	0.3
4	0.8
5	1.2
6	1.6

Teilaufgabe 1.6 (4 BE)
Der Graph von f besitzt an der Stelle $x = -1$ die Tangente w. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Tangente w und zeichnen Sie den Graphen von w ins Schaubild der Aufgabe 1.5. ein.

$x_0 := -1$

CAS

$w(x) := f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ $\qquad$ $w(x) = \frac{132}{25} - \frac{48\cdot x}{25}$

zum Zeichnen: $\quad w(-1) = 7.2 \qquad w(1) = 3.36$

Teilaufgabe 1.7 (5 BE)
Der Graph von f und der Graph von w schließen ein endliches Flächenstück ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.5 und berechnen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhaltes A.

CAS

Schnittpunkt: $\quad f(x) = w(x) \rightarrow \frac{(x-2)^2}{\frac{x^2}{4}+1} = \frac{132}{25} - \frac{48\cdot x}{25}$ auflösen, x $\rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

CAS

$A := \int_{-1}^{\frac{8}{3}} (w(x) - f(x))\,dx$ $\qquad$ $A = 8\cdot\ln\left(\frac{100}{9}\right) - 8\cdot\ln(5) - \frac{88}{75}$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind nun die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{-4\cdot(a^2-1)\cdot x}{1 + 0.25\cdot x^2} + 4$ in der vom Parameter $a \in IR$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = IR$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)
Überprüfen Sie **ohne CAS**, ob die Funktion f aus Aufgabe 1.0 zur Funktionenschar f_a gehört.

$$f_a(x) = \frac{-4\cdot(a^2-1)\cdot x}{1+0.25\cdot x^2} + 4 = \frac{-4\cdot a^2\cdot x + 4\cdot x + 4\cdot(1+0.25\cdot x^2)}{1+0.25\cdot x^2} = \frac{-4\cdot a^2\cdot x + 4\cdot x + 4 + x^2}{1+0.25\cdot x^2}$$

$f_a(x) = \frac{x^2 - 4\cdot(a^2-1)\cdot x + 4}{1+0.25\cdot x^2}$ $\qquad$ zum Vergleich: $\qquad f(x) = \frac{x^2 - 4\cdot x + 4}{1+0.25\cdot x^2}$

Koeffizientenvergleich:

$a^2 - 1 = 1 \;\Rightarrow\; a^2 = 2 \;\Rightarrow\; a_1 = -\sqrt{2} \quad a_2 = \sqrt{2} \;\Rightarrow$ f aus 1.0 gehört zur Funktionenschar.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)
Bestimmen Sie alle Werte von a, für welche f_a genau zwei einfache Nullstellen besitzt.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot(a-1)\cdot x + 4 = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot a + 2\cdot\sqrt{a^2 - 2\cdot a} - 2 \\ 2\cdot a - 2\cdot\sqrt{a^2 - 2\cdot a} - 2 \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $\quad D(a) := a^2 - 2\cdot a$

Vorzeichen der Diskriminante:

CAS

$$D(a) > 0 \rightarrow a^2 - 2\cdot a > 0 \text{ auflösen}, a \rightarrow a < 0 \vee 2 < a$$

zwei einfache Nullstellen, falls $D(a) > 0$, also für $a \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; \infty[$

Teilaufgabe 2.3 (3 BE)
Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass G_{f_a} symmetrisch zur y-Achse ist.

$$f(x,a) := \frac{x^2 - 4\cdot\left(a^2-1\right)\cdot x + 4}{1 + \frac{1}{4}\cdot x^2}$$

CAS

Bedingung: $\quad f(x,a) = f(-x,a) \text{ auflösen}, a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

G_f achsensymmetrisch sein für $a_1 = -1 \vee a_2 = 1$.

Teilaufgabe 2.4 (4 BE)
Ermitteln Sie, für welchen Werte von a die Steigung des Graphen G_{f_a} an der Stelle $x = -1$ einen Extremwert annimmt. Geben Sie außerdem den Wert dieser Steigung an.

CAS

Ableitungsfunktion: $\quad f'(x,a) := \frac{d}{dx}f(x,a) = \frac{16\cdot\left(a^2-1\right)\cdot\left(x^2-4\right)}{\left(x^2+4\right)^2}$

CAS

an der Stelle $x = -1$ $\quad f'(-1,a) = \frac{48}{25} - \frac{48\cdot a^2}{25}$

$\frac{48}{25} - \frac{48\cdot a^2}{25}$ ist extremal für $a = 0$. Die maximale Steigun gbeträgt $m = \frac{48}{25}$.

Teilaufgabe 3.0
Zur Gewinnung von Energieholz eignen sich schnell wachsende Pappeln, deren Wachstum über einen Zeitraum von 10 Jahren beobachtet wird. Die Höhe der Pappeln (in Metern) kann näherungsweise durch die Funktion H mit $H(t) = \dfrac{a \cdot e^{k\cdot(t-2)}}{3 + 2e^{k\cdot(t-2)}}$ mit $a, k, t \in \mathbb{R}$ und $a > 0, k > 0, t \in [0; 10]$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Jahren ab dem Beobachtungsbeginn ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Pappel eingepflanzt und hat bereits eine gewisse Höhe. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn erreicht die Pappel eine Höhe von 8 Metern und in den darauffolgenden 5 Jahren wächst sie um weitere 11,8 Meter.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (3 BE)
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und k.

$$H(t,a,k) := \frac{a \cdot e^{k\cdot(t-2)}}{3 + 2e^{k\cdot(t-2)}}$$

Gleichungssystem:

CAS

$$\begin{pmatrix} a_0 & k_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} H(2,a,k) = 8 \\ H(7,a,k) = \frac{198}{10} \end{pmatrix} \text{auflösen}, a, k \rightarrow \begin{pmatrix} 40 & \frac{\ln(297)}{5} - \frac{\ln(2)}{5} \end{pmatrix}$$

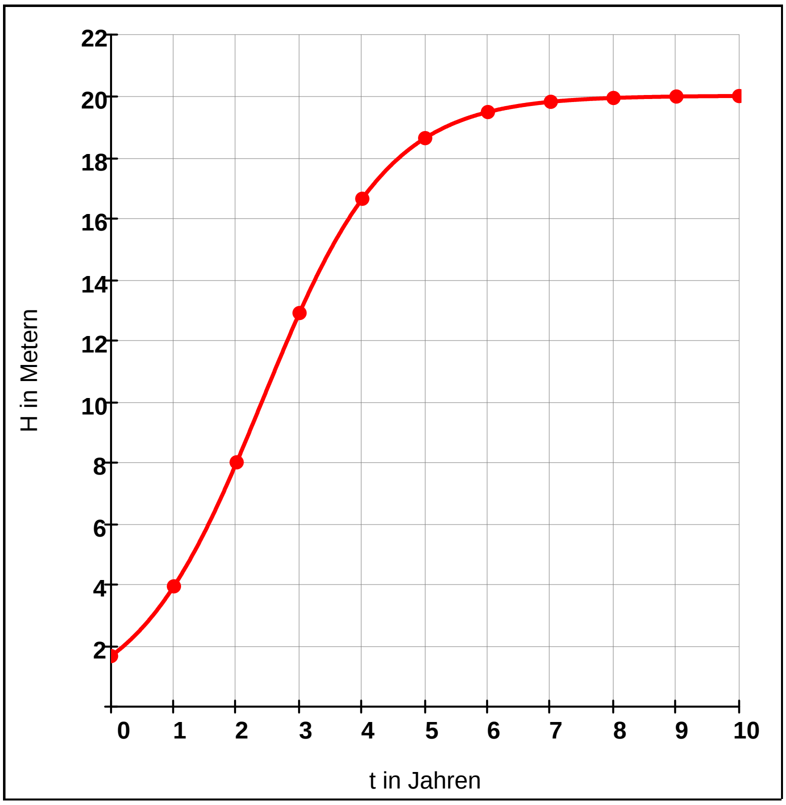
Auslesen der Koeffizienten: $a_0 = 40$ $k_0 = 1.0$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 40 und k = 1,0.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Berechnen Sie den Höhenzuwachs der Pappel innerhalb der ersten zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn und zeichnen Sie unter Verwendung geeigneter Funktionswerte den Graphen von H für den gesamten Beobachtungszeitraum in ein geeignetes Koordinatensystem.

$$H(t) := \frac{40 \cdot e^{t-2}}{3 + 2e^{t-2}} \qquad H(2) = 8 \qquad H(0) = \frac{40 \cdot e^{-2}}{2 \cdot e^{-2} + 3} = 1.7$$

Höhenzuwachs: $H(2) - H(0) = 6.3$



$t_d =$	$H(t_d) =$
0	1.7
1	3.9
2	8
3	12.9
4	16.6
5	18.6
6	19.5
7	19.8
8	19.9
9	20
10	20

Teilaufgabe 3.3 **(7 BE)**
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_w für $t \in \left]\, 0 \,;\, 10 \,\right[$ an dem die Pappeln am stärksten wachsen.

$$H'(t) := \frac{d}{dt} H(t) = \frac{120 \cdot e^{t-2}}{\left(2 \cdot e^{t-2} + 3\right)^2}$$

$$H''(t) := \frac{d}{dt} H'(t) = \frac{360 \cdot e^{-2} \cdot e^{t} - 240 \cdot e^{-4} \cdot e^{2 \cdot t}}{\left(2 \cdot e^{-2} \cdot e^{t} + 3\right)^3} = -\frac{120 \cdot \left(2 \cdot e^{-4} \cdot e^{2 \cdot t} - 3 \cdot e^{-2} \cdot e^{t}\right)}{\left(2 \cdot e^{-2} \cdot e^{t} + 3\right)^3}$$

$t_0 := H''(t) = 0$ auflösen, $t \rightarrow \ln(3) - \ln(2) + 2$ $\qquad t_0 = \ln(3) - \ln(2) + 2$ $\qquad t_0 = 2.4$

Funktionswert: $H'(t_0) = 5.0$

Vergleich mit den Randwerten: $H'(0) = 1.5$

$H'(10) = 0.01$

Im Alter von 2,4 Jahren wächst die Pappel mit 5 Metern Längenzuwachs pro Jahr am schnellsten.

Teilaufgabe 3.4 (3 BE)
Aus wirtschaftlichen Gründen werden die Pappeln gefällt, sobald sie von einem Jahr zum nächsten weniger als 0,35 Meter wachsen würden. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt t_{35} auf ein Jahr gerundet.

CAS

$$H(t_{35}+1) - H(t_{35}) = 0.35 \text{ auflösen}, t_{35} \rightarrow \begin{pmatrix} 5.9534347780317857474 \\ -2.1425045618154569834 \end{pmatrix}$$

$t_{35} := 5.95 \qquad t_{35} = 6$

Der Baum wird nach sechs Jahren gefällt

Teilaufgabe 3.5 (5 BE)
Eine langsam wachsende Baumsorte lässt sich modellhaft im gleichen Zeitraum $t \in [0; 10]$ durch eine der drei Funktionen mit den Funktionsgleichungen (1), (2) oder (3) mit dem Parameter $b \in IR$ und $b > 0$ beschreiben. Diese langsam wachsende Baumsorte hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Höhe (in Metern) wie die Pappel, sie benötigt allerdings doppelt so lange, um auf eine bestimmte Höhe zu wachsen.

(1) $L_1(t) = \dfrac{40 \cdot e^{t-2+b}}{3 + 2 \cdot e^{t-2+b}}$; (2) $L_2(t) = b \cdot \dfrac{40 \cdot e^{t-2}}{3 + 2 \cdot e^{t-2}}$; (3) $L_2(t) = \dfrac{40 \cdot e^{b \cdot t-2}}{3 + 2 \cdot e^{b \cdot t-2}}$;

Schließen Sie mit geeigneter Argumentation zwei der vorgegebenen Funktionsgleichungen aus. Geben Sie weiterhin den Wert von b für die zutreffende Funktionsgleichung an.

Es muss folgendes Kriterium gelten: $L_i(0) = H(0) = 1.7$

(1) kann nicht zutreffen, da " **+b** " im Exponenten nur eine Verschiebung entlang der t-Achse hervorrufen würde.

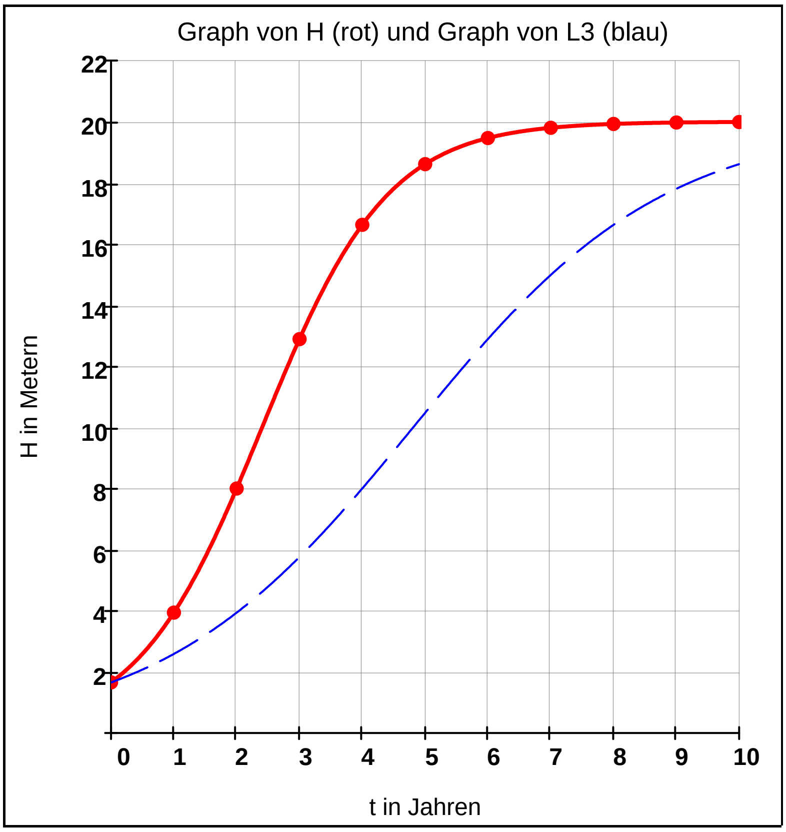
(2) kann nicht zutreffen, da " **b** " als Faktor die Anfangshöhe verändern würde.

Also muss (3) die gesuchte Gleichung sein.

$$L_3(4) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40 \cdot e^{b \cdot 4-2}}{3 + 2 \cdot e^{b \cdot 4-2}} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 40 \cdot e^{b \cdot 4-2} = 8 \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{b \cdot 4-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot e^{4 \cdot b-2} - 2 \cdot e^{4 \cdot b-2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4 \cdot b-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_3 := \frac{1}{4} \cdot (\ln(1) + 2) \qquad b_3 = 0.5$$

$$L_3(t) := \frac{40 \cdot e^{0.5 \cdot t-2}}{3 + 2 \cdot e^{0.5 \cdot t-2}}$$


Graph von H (rot) und Graph von L3 (blau)
H in Metern
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
t in Jahren