Abschlussprüfung Berufliche Oberschule 2017

- **Mathematik 12 Technik - A I - Lösung**

made with mathcad

Teilaufgabe 1.0

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) := \dfrac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge

$D_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion wird mit G_f bezeichnet.

Teilaufgabe 1.1 (3 BE)

Ermitteln Sie das Verhalten der Funktionswerte f(x) an den Rändern der Definitionsmenge und geben Sie Art und Gleichung der Asymptote von G_f an.

Zählergrad gleich Nennergrad $\Rightarrow$ waagrechte Asymptote: $y = \dfrac{1}{0.25} = 4$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} \to 4 \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} \to 4$$

Teilaufgabe 1.2 (4 BE)

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von G_f mit seiner Asymptote.

$$f(x) = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{1+\frac{1}{4}\cdot x^2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot x + 4 = 4 + x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -4\cdot x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$f(0) = 4$ Schnittpunkt: **S (0 | 4)**

Teilaufgabe 1.3 (10 BE)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f.

[Mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2}$]

$$f'(x) = \frac{2\cdot(x-2)\cdot\left(1+\frac{1}{4}\cdot x^2\right) - (x-2)^2\cdot\frac{1}{2}\cdot x}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2} = (x-2)\cdot\frac{2+\frac{1}{2}\cdot x^2 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + x}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2} = \frac{(2+x)\cdot(x-2)}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4}{\left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^2 - \left(x^2 - 4\right) \cdot 2 \cdot \left(1 + 0.25 \cdot x^2\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot x}{\left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^4} = \frac{2 \cdot x \cdot \left(1 + 0.25 \cdot x^2\right) - \left(x^2 - 4\right) \cdot x}{\left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^3 - x^3 + 4 \cdot x}{\left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^3} = \frac{6 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^3}{\left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)^3}$$

$$6 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^3 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \cdot x \cdot \left(12 - x^2\right) = 0$$

Lösungen: $x_1 = 0$ $\qquad x_2 = -\sqrt{12}$ $\qquad x_3 = \sqrt{12}$

		$x = -\sqrt{12}$		$x = 0$		$x = \sqrt{12}$	
Zähler	**pos**		**neg**		**pos**		**neg**
Nenner	**pos**		**pos**		**pos**		**pos**
f''(x)	**pos**		**neg**		**pos**		**neg**
G_f	**lk**		**rk**		**lk**		**rk**

G_f ist linksgekrümmt in $x \in \left]-\infty; -\sqrt{12}\right]$,

G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in \left[-\sqrt{12}; 0\right]$,

G_f ist linksgekrümmt in $x \in \left[0; \sqrt{12}\right]$,

G_f ist rechtsgekrümmt in $x \in \left[\sqrt{12}; \infty\right[$.

Teilaufgabe 1.4 (5 BE)
Geben Sie die Nullstelle von f sowie deren Vielfachheit an und zeichnen Sie unter Verwendung bisheriger Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte den Graph von f sowie dessen Asymptote für $-6 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem. Berücksichtigen Sie dabei, dass der Graph von f den Hochpunkt $H(-2\,|\,8)$ besitzt, ein Nachweis ist nicht erforderlich
Maßstab: 1LE = 1 cm.

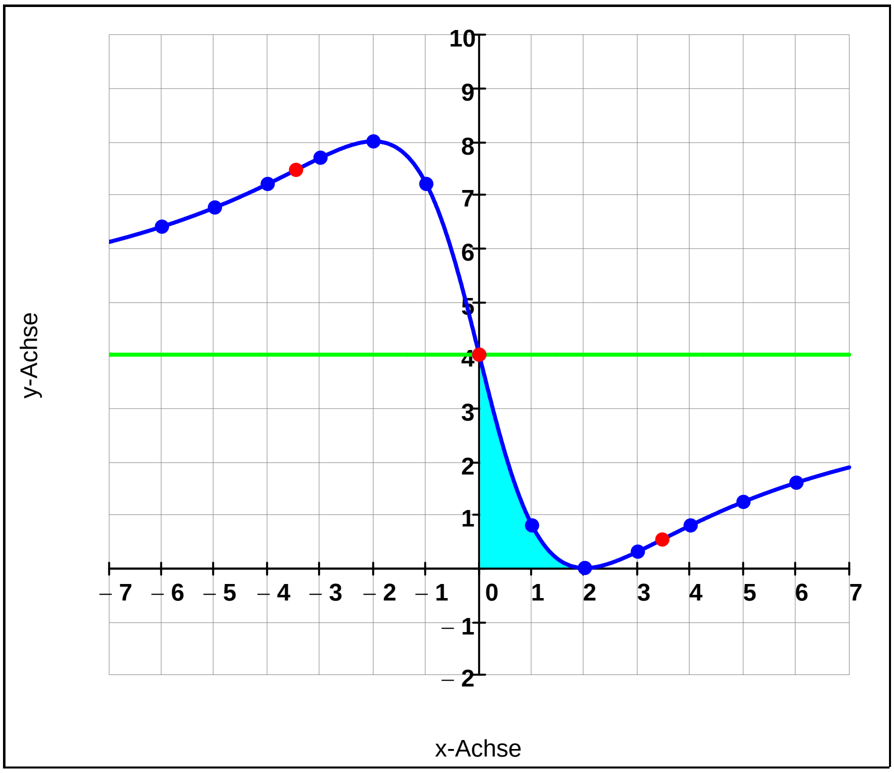
Nullstelle: $(x-2)^2 = 0$ $\quad x_{12} = 2$ $\quad$ zweifach, Graph berührt x-Achse.

Hochpunkt: $H(-2\,|\,8)$ $\quad$ Tiefpunkt: $T(2\,|\,0)$

Wendepunkte: $f\left(-\sqrt{12}\right) = \dfrac{\left(2\cdot\sqrt{3}+2\right)^2}{4} = 7.5$ $\quad \sqrt{12} = 3.5$ $\quad W_1(-3.5\,|\,7.5)$

$f(0) = 4$ $\quad W_2(0\,|\,4)$

$f\left(\sqrt{12}\right) = \dfrac{\left(2\cdot\sqrt{3}-2\right)^2}{4} = 0.5$ $\quad W_3(3.5\,|\,0.5)$



$x_d =$	$f(x_d) =$
-6	6.4
-5	6.8
-4	7.2
-3	7.7
-2	8
-1	7.2
0	4
1	0.8
2	0
3	0.3
4	0.8
5	1.2
6	1.6

Teilaufgabe 1.5 (3 BE)

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = -8 \cdot \ln\left(x^2 + 4\right) + 4 \cdot x$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

$$F'(x) = \frac{-8}{x^2 + 4} \cdot 2 \cdot x + 4 = \frac{-16 \cdot x + 4 \cdot x^2 + 16}{x^2 + 4} = \frac{4 \cdot \left(x^2 - 4 \cdot x + 4\right)}{x^2 + 4} = \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4} \cdot \left(x^2 + 4\right)} = \frac{(x-2)^2}{\frac{1}{4} \cdot x^2 + 1} = f(x)$$

Teilaufgabe 1.6 (3 BE)

Der Graph von f schließt zusammen mit den Koordinatenachsen im 1. Quadranten ein endliches Flächenstück ein.
Markieren Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung aus 1.4 und zeigen Sie, dass die Maßzahl seines Flächeninhalts $A = 8 \cdot (1 - \ln(2))$ beträgt.

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx = F(2) - F(0) = (-8 \cdot \ln(4 + 4) + 4 \cdot 2) - (-8 \cdot \ln(4)) = 8 \cdot (1 - \ln(8) + \ln(4))$$

$$A = 8\left(1 + \ln\left(\frac{4}{8}\right)\right) = 8 \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 8 \cdot (1 - \ln(2))$$

Teilaufgabe 2.0

Gegeben sind nun die reellen Funktionen f_a mit $f_a(x) = \frac{-4 \cdot (a-1) \cdot x}{1 + 0.25 \cdot x^2} + 4$ in der vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ unabhängigen Definitionsmenge $D_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktin wird mit G_{f_a} bezeichnet.

Teilaufgabe 2.1 (4 BE)

Überprüfen Sie, ob die Funktion f aus Aufgabe 1.0 zur Funktionenschar f_a gehört.

$$f_a(x) = \frac{-4 \cdot (a-1) \cdot x}{1 + 0.25 \cdot x^2} + 4 = \frac{-4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot x + 4 \cdot \left(1 + 0.25 \cdot x^2\right)}{1 + 0.25 \cdot x^2} = \frac{-4 \cdot a \cdot x + 4 \cdot x + 4 + x^2}{1 + 0.25 \cdot x^2}$$

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot (a-1) \cdot x + 4}{1 + 0.25 \cdot x^2}$$ zum Vergleich: $$f(x) = \frac{x^2 - 4 \cdot x + 4}{1 + 0.25 \cdot x^2}$$

Koeffizientenvergleich:

$a - 1 = 1 \;\Rightarrow\; a = 2 \quad \Rightarrow$ f aus 1.0 gehört zur Funktionenschar.

Teilaufgabe 2.2 (6 BE)

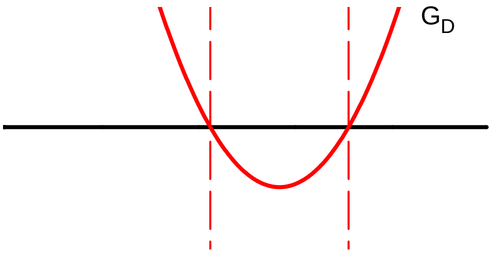
Bestimmen Sie alle Werte von a, für welche f_a genau zwei einfache Nullstellen besitzt.

$$f_a(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4\cdot(a-1)\cdot x + 4 = 0 \;\left|\begin{array}{l}\text{auflösen}, x\\ \text{erweitern}\end{array}\right. \rightarrow \begin{pmatrix} 2\cdot a + 2\cdot\sqrt{a^2 - 2\cdot a} - 2 \\ 2\cdot a - 2\cdot\sqrt{a^2 - 2\cdot a} - 2 \end{pmatrix}$$

Diskriminante: $D = 16\cdot(a-1)^2 - 16 = 16\cdot\left(a^2 - 2\cdot a + 1 - 1\right) = 16\cdot\left(a^2 - 2\cdot a\right)$

Vorzeichen der Diskriminante:

NR $\quad a^2 - 2\cdot a = 0$ auflösen, a $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$



zwei einfache Nullstellen, falls $D(a) > 0$, also für $a \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; \infty[$

Teilaufgabe 2.3 (6 BE)

Untersuchen Sie, ob es einen Wert von a gibt, sodass G_{f_a} symmetrisch zur y-Achse ist.

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 4\cdot(a-1)\cdot x + 4}{1 + 0.25\cdot x^2}$$

Nenner ist achsensymmetrisch,
Zähler kann achsensymmetrisch sein für $a = 1$.

Teilaufgabe 2.4 (5 BE)

Ermitteln Sie alle Werte für a, für welche die Tangente an der Stelle $x = 0$ an den Graphen G_{f_a} einen Steigungswert von $m \le -4$ aufweist.

$$f_a(x) = \frac{-4\cdot(a-1)\cdot x}{1 + 0.25\cdot x^2} + 4$$

$$f'_a(x) = \frac{-4\cdot(a-1)\cdot\left(1 + 0.25\cdot x^2\right) + 4\cdot(a-1)\cdot x\cdot 2\cdot 0.25\cdot x}{\left(1 + 0.25\cdot x^2\right)^2}$$

$$f'_a(x) = 4\cdot(a-1)\cdot\frac{-1-0.25x^2+0.5\cdot x^2}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2} = 4\cdot(a-1)\cdot\frac{0.25\cdot x^2-1}{\left(1+0.25\cdot x^2\right)^2}$$

$$f'_a(0) = -4\cdot(a-1)$$

Bedingung: $f'_a(0) \le -4 \quad \Leftrightarrow \quad -4\cdot(a-1) \le -4 \quad \Leftrightarrow \quad a-1 \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad a \ge 2$

Teilaufgabe 3.0
Zur Gewinnung von Energieholz eignen sich schnell wachsende Pappeln, deren Wachstum über einen Zeitraum von 10 Jahren beobachtet wird. Die Höhe der Pappeln (in Metern) kann näherungsweise durch die Funktion H mit $H(t) = \frac{a\cdot e^{k\cdot(t-2)}}{3+2e^{k\cdot(t-2)}}$ mit $a, k, t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, $k > 0$, $t \in [\,0;\,10]$ beschrieben werden, wobei t die Zeit in Jahren ab dem Beobachtungsbeginn ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Pappel eingepflanzt und hat bereits eine gewisse Höhe. Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn erreicht die Pappel eine Höhe von 8 Metern und in den darauffolgenden 5 Jahren wächst sie um weitere 11,8 Meter.

Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden. Alle Ergebnisse sind gegebenenfalls auf eine Nachkommastelle zu runden.

Teilaufgabe 3.1 (5 BE)
Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und k.

$$H(t) = \frac{a\cdot e^{k\cdot(t-2)}}{3+2e^{k\cdot(t-2)}}$$

$$H(2) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a\cdot e^0}{3+2e^0} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{5} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad a = 40$$

$$H(7) = 19.8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40\cdot e^{k\cdot 5}}{3+2e^{k\cdot 5}} = 19.8 \quad \Leftrightarrow \quad 40\cdot e^{k\cdot 5} = 19.8\cdot\left(3+2e^{k\cdot 5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 40\cdot e^{5\cdot k} - 39.6\cdot e^{5\cdot k} = 59.4$$

$$\Leftrightarrow \quad 0.4\cdot e^{5\cdot k} = 59.4$$

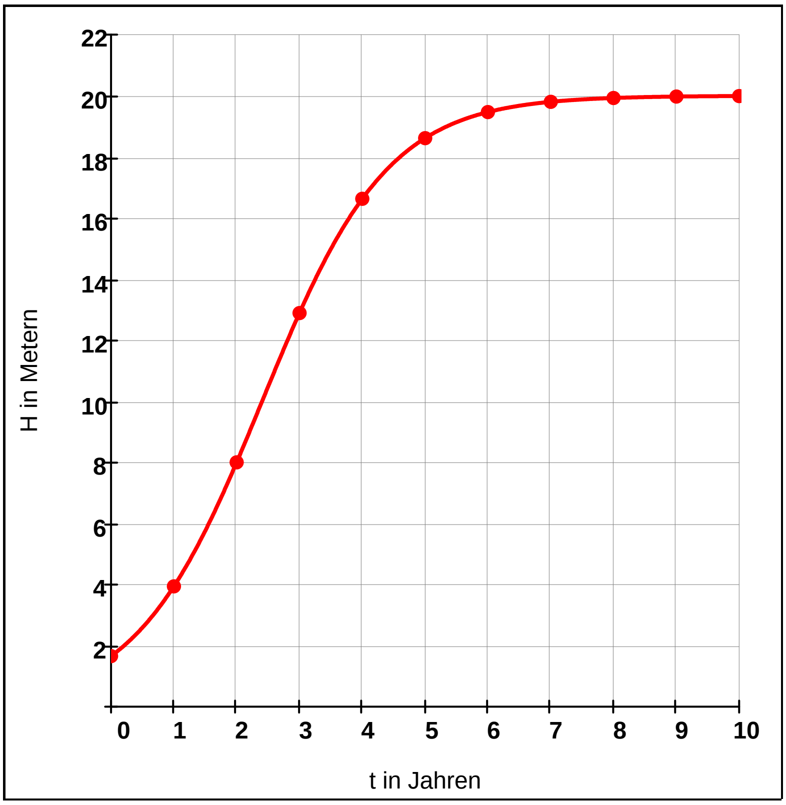
$$\Leftrightarrow \quad 5\cdot k = \ln\left(\frac{59.4}{0.4}\right) \qquad k := \frac{1}{5}\cdot\ln(148.5) \qquad k = 1.000$$

Für die folgenden Teilaufgaben gilt a = 40 und k = 1,0.

Teilaufgabe 3.2 (5 BE)
Berechnen Sie den Höhenzuwachs der Pappel innerhalb der ersten zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn und zeichnen Sie unter Verwendung geeigneter Funktionswerte den Graphen von H für den gesamten Beobachtungszeitraum in ein geeignetes Koordinatensystem.

$$H(t) := \frac{40 \cdot e^{t-2}}{3 + 2e^{t-2}} \qquad H(2) = 8 \qquad H(0) = \frac{40 \cdot e^{-2}}{2 \cdot e^{-2} + 3} = 1.7$$

Höhenzuwachs: $H(2) - H(0) = 6.3$



$t_d =$	$H(t_d) =$
0	1.7
1	3.9
2	8
3	12.9
4	16.6
5	18.6
6	19.5
7	19.8
8	19.9
9	20
10	20

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Zusätzlich zur Funktion H ist ihre Ableitungsfunktion mit $H'(t) := \frac{120 \cdot e^{t-2}}{\left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right)^2}$ gegeben (Nachweis nicht erforderlich).
Bestimmen Sie den Zeitpunkt t_w, an dem die Pappeln am stärksten wachsen.

$$H''(t) = \frac{120 \cdot e^{t-2} \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right)^2 - 120 \cdot e^{t-2} \cdot 2 \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right) \cdot 2 \cdot e^{t-2}}{\left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right)^4}$$

$$H''(t) = \frac{120 \cdot e^{t-2} \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right) \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{t-2} - 4 \cdot e^{t-2}\right)}{\left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right)^4}$$

$$H''(t) = \frac{120 \cdot e^{t-2} \cdot \left(3 - 2 \cdot e^{t-2}\right)}{\left(3 + 2 \cdot e^{t-2}\right)^3}$$

$H''(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 - 2 \cdot e^{t-2} = 0 \qquad t_0 := \ln\left(\frac{3}{2}\right) + 2 \qquad t_0 = 2.4$

Funktionswert: $H'(t_0) = 5.0$

Vergleich mit den Randwerten: $H'(0) = 1.5$

$H'(10) = 0.01$

Im Alter von 2,4 Jahren wächst die Pappel mit 5 Metern Längenzuwachs pro Jahr am schnellsten.

Teilaufgabe 3.4 (5 BE)

Eine langsam wachsende Baumsorte lässt sich modellhaft im gleichen Zeitraum $t \in [0; 10]$ durch eine der drei Funktionen mit den Funktionsgleichungen (1), (2) oder (3) mit dem Parameter $b \in IR$ und $b > 0$ beschreiben. Diese langsam wachsende Baumsorte hat zum Zeitpunkt $t = 0$ die gleiche Höhe (in Metern) wie die Pappel, sie benötigt allerdings doppelt so lange, um auf eine bestimmte Höhe zu wachsen.

(1) $L_1(t) = \frac{40 \cdot e^{t-2+b}}{3 + 2 \cdot e^{t-2+b}}$; (2) $L_2(t) = b \cdot \frac{40 \cdot e^{t-2}}{3 + 2 \cdot e^{t-2}}$; (3) $L_2(t) = \frac{40 \cdot e^{b \cdot t-2}}{3 + 2 \cdot e^{b \cdot t-2}}$;

Schließen Sie mit geeigneter Argumentation zwei der vorgegebenen Funktionsgleichungen aus. Geben Sie weiterhin den Wert von b für die zutreffende Funktionsgleichung an.

Es muss folgendes Kriterium gelten: $L_i(0) = H(0) = 1.7$

(1) kann nicht zutreffen, da " $+b$ " im Exponenten nur eine Verschiebung entlang der t-Achse hervorrufen würde.

(2) kann nicht zutreffen, da " b " als Faktor die Anfangshöhe verändern würde.

Also muss (3) die gesuchte Gleichung sein.

$$L_3(4) = 8 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{40 \cdot e^{b \cdot 4-2}}{3 + 2 \cdot e^{b \cdot 4-2}} = 8 \quad \Leftrightarrow \quad 40 \cdot e^{b \cdot 4-2} = 8 \cdot \left(3 + 2 \cdot e^{b \cdot 4-2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 \cdot e^{4 \cdot b-2} - 2 \cdot e^{4 \cdot b-2} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4 \cdot b-2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b_3 := \frac{1}{4} \cdot (\ln(1) + 2) \qquad b_3 = 0.5$$

$$L_3(t) := \frac{40 \cdot e^{0.5 \cdot t - 2}}{3 + 2 \cdot e^{0.5 \cdot t - 2}}$$